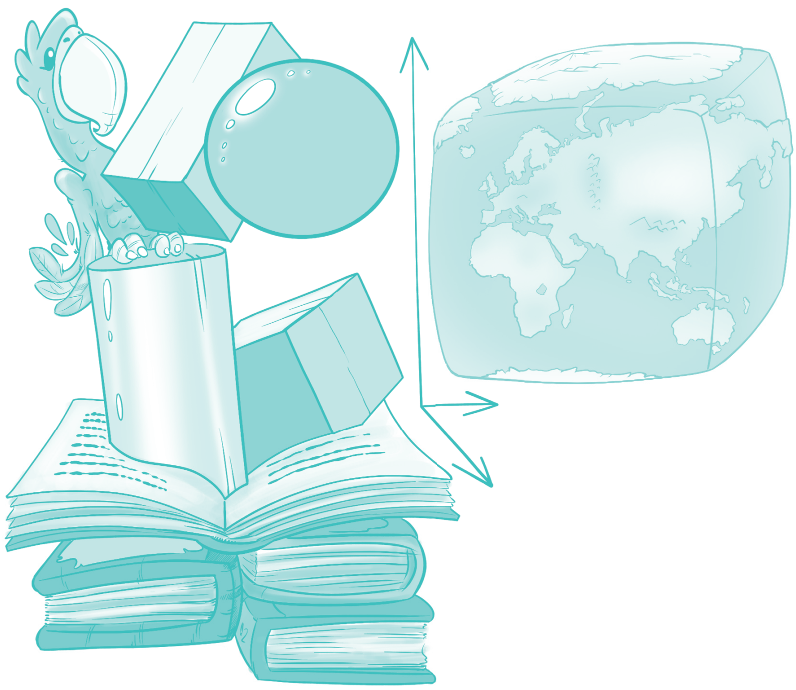
LiberaTerra

Marta Mlynarčíková

MATEMATIKA

Pracovný zošit 2



pre gymnáziá a stredné školy

KOMBINATORIKA

Riešenie úloh z kombinatoriky

Systematické vypisovanie všetkých možností

- symboly
- obrázky
- stromy možností
- grafy
- schémy
- tabuľky

Použitie pravidla súčtu a pravidla súčinu

Rozhodnutie, o aký typ úlohy ide, a použitie správneho vzorca

- **variácie** (záleží na poradí prvkov v skupine)
- **kombinácie** (nezáleží na poradí prvkov v skupine)

Keď chcete zistiť počet všetkých možností, snažte sa tieto možnosti rozdeliť na niekoľko podskupín, zistiť počet možností v každej podskupine a tieto počty potom sčítať. Podskupiny musia byť disjunktné (neobsahujú spoločné prvky) a každá možnosť musí byť v niektorej podskupine.

Pravidlo súčtu:
Počet všetkých možností je súčet počtu možností podskupín.

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow |M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2|$$

Pravidlo platí aj pre viac množín, z ktorých každé dve sú disjunktné.

Zvlášť výhodné je, ak podskupiny opisované v pravidle súčtu majú rovnaký počet prvkov.

Potom platí **pravidlo súčinu**:

Počet možností dostaneme, ak vynásobíme počet podskupín početnosťou podskupiny.

Pravidlo súčinu všeobecnejšie:

Ak jeden prvok môžeme vybrať s_1 spôsobmi a druhý prvok môžeme vybrať nezávisle od prvého výberu s_2 spôsobmi, potom počet možností na výber oboch prvkov je $s_1 \cdot s_2$.

Pravidlo platí aj pre viac od seba nezávislých výberov.

Pri zápisoch riešenia úloh a pri odvodzovaní vzorcov v kombinatorike používame **faktoriál**.

Definujeme ho pre každé $n \in N$: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $0! = 1$.

Napr. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, $11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 39\,916\,800$.

Definície | **Vety, vzorce na výpočet počtu všetkých variácií...**

Variácia bez opakovania k-tej triedy z n prvkov je každá usporiadaná k-tica rôznych prvkov vybraných z n-prvkovej množiny ($k, n \in N$, $k \leq n$).

Variáciu n-tej triedy bez opakovania z n-prvkovej množiny nazývame **permutácia z n prvkov**.

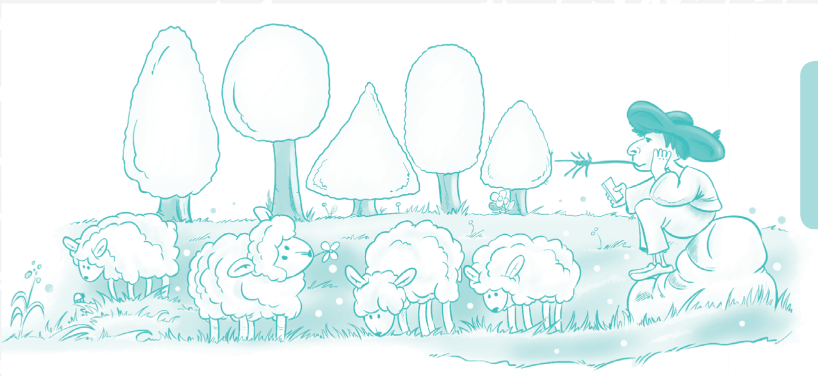
$$\forall\, k, n \in N, k \leq n\colon V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\forall\, n \in N\colon P(n) = n!$$

Variácia k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je každá usporiadaná k-tica prvkov vybraných z n-prvkovej množiny. V k-tici sa môžu prvky ľubovoľne veľa ráz opakovať.

Permutácia s opakovaním z n prvkov, z ktorých je n_1 prvkov 1. druhu, n_2 prvkov 2. druhu ... n_k prvkov k-tého druhu, pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, je každá usporiadaná n-tica z týchto prvkov.

$$\forall\, k, n \in N\colon V'_k(n) = n^k$$



$$\forall\, n_1, n_2, \dots, n_k \in N$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k : P'_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania je každá k-prvková podmnožina z n-prvkovej množiny ($n, k \in N_0 : k \leq n$).

$$\forall\, k, n \in N_0, k \leq n : C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$ je kombinačné číslo, čítame ho „n nad k“.

Vlastnosti kombinačných čísel

$$\forall\, n, k \in N_0, k \leq n : \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Slovné úlohy – vypisovanie možností, kombinatorické pravidlá

1. Adam, Jana a Eva si kúpili vstupenky do divadla do jedného radu vedľa seba.

a) Vypíšte všetky možnosti, ako sa môžu v divadle usadiť. Koľko možností majú?

b) Podčiarknite tie možnosti, v ktorých Adam sedí vedľa Evy. Koľko ich je?

2. V obchode majú vaše obľúbené pero v piatich rôznych farbách – červenej, modrej, zelenej, bielej a oranžovej. Chcete si kúpiť dve perá. Koľko možností máte na výber, ak si kúpite dve perá rôznej farby? Vypíšte všetky možnosti. Mali by ste viac možností, ak by ste si chceli kúpiť tri perá rôznych farieb?

3. Koľko štvorciferných čísel môžeme vytvoriť, ak použijeme cifru 1 raz, cifru 5 raz a cifru 7 dvakrát? Vypíšte všetky možnosti.

4. Vytvorte všetky jednociferné až trojciferné čísla, ktoré obsahujú iba cifry 1 a 2. Koľko ich je?

5. Šachového turnaja sa zúčastnili 4 hráči.

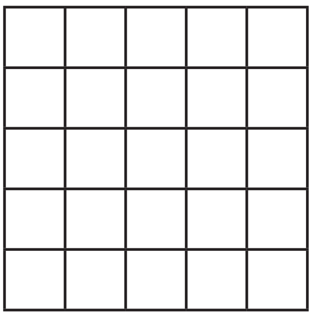
a) Koľko zápasov sa odohralo, keď sa hralo systémom každý s každým bez odvety? Úlohu vyriešte aspoň dvomi spôsobmi.

b) Koľko zápasov sa odohralo, keď sa hralo systémom každý s každým s odvetou?

6. Koľkými spôsobmi môžeme rozmeniť 1-eurovú mincu pomocou 50-centových, 20-centových a 10-centových mincí?

7. Z domu k obchodu s potravinami môže ísť Peter 4 cestami a z obchodu ku škole 2 cestami. Nakreslite situáciu a zistite, koľkými spôsobmi môže Peter prejsť z domu do školy, ak si chce cestou v obchode s potravinami kúpiť desiatu.

8. Koľko štvorcov je v štvorcovej sieti na obrázku? Každý štvorec má vrcholy v priesečníkoch úsečiek štvorcovej siete a strany na úsečkách štvorcovej siete.



9. Pretekárka biatlonu v jednej streľbe strieľa na päť terčíkov. Koľkými spôsobmi mohla prebiehať jej streľba, ak vieme, že netrafila dva terčíky?

10. Výsledok hokejového zápasu bol 3 : 2. Koľkými spôsobmi sa mohol vyvíjať priebeh zápasu čo do poradia padania gólov domáceho a hosťujúceho družstva?

Faktoriál, kombinačné číslo, výrazy, rovnice

1. Vypočítajte.

a) $6! =$

b) $\frac{7!}{5!} =$

c) $\frac{8! - 7!}{4!} =$

d) $\frac{3! + 5!}{6!} - \frac{0!}{3!} =$

2. Dané sú čísla $x = 70! + 73!$, $y = 71! + 72!$. Určte, ktoré z týchto čísel je väčšie.

3. Vypočítajte hodnoty kombinačných čísel.

a) $\binom{5}{2} =$ b) $\binom{5}{3} =$ c) $\binom{6}{3} =$

d) $\binom{7}{3} =$ e) $\binom{7}{4} =$ f) $\binom{8}{4} =$

g) $\binom{10}{1} =$ h) $\binom{10}{9} =$ i) $\binom{0}{0} =$

4. Blaise Pascal (1623 – 1662) usporiadal kombinačné čísla do schémy, ktorá sa podľa neho volá Pascalov trojuholník. Do oboch obrázkov doplňte ďalšie dva riadky Pascalovho trojuholníka.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

5. Z Pascalovho trojuholníka určte hodnoty kombinačných čísel.

a) $\binom{4}{2} =$ b) $\binom{4}{3} =$ c) $\binom{5}{3} =$

d) $\binom{5}{4} =$ e) $\binom{5}{5} =$ f) $\binom{6}{5} =$

6. Doplňte vynechané miesta v kombinačných číslach tak, aby uvedené rovnosti platili.

a) $\binom{\ }{7} = 1$ b) $\binom{3}{\ } = \binom{3}{\ } = 1$ c) $\binom{6}{4} = \binom{6}{\ }$ d) $\binom{8}{2} = \binom{\ }{6}$

e) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{\ }{3}$ f) $\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{\ }{\ }$ g) $\binom{7}{\ } + \binom{7}{\ } = \binom{8}{4}$ h) $\binom{\ }{3} + \binom{\ }{4} = \binom{5}{4}$

7. Upravte výrazy a určte podmienky.

a) $\dfrac{x!}{(x-2)!} =$ b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!} =$

c) $\dfrac{(k+1)!}{(k+3)!} =$ d) $\dfrac{(3s+2)!}{(3s)!} =$

8. V obore N_0 riešte rovnice:

a) $n! = 72 \cdot (n-2)!$ b) $\dfrac{s!}{(s-2)!} = 42$

c) $2 \cdot \dfrac{(m+1)!}{(m-1)!} = 9m - 3$ d) $(u!)^2 - 100 \cdot u! = 2\,400$

9. V obore N_0 riešte rovnice:

a) $\binom{n}{1} + \binom{n-2}{2} = 8$

b) $\binom{x}{2} - \binom{x-1}{x-3} = \binom{6}{2} + \binom{4}{0}$

c) $\binom{x-2}{x-4} + \binom{x+4}{x+2} = 8x + 3$

d) $\binom{n+3}{n+1} + \binom{n-1}{2} = 10$

Mix slovných úloh

1. 15 kamaráti sa dohodli, že cez víkend každý každému pošle jednu SMS. Koľko SMS poslali?

2. V jednej rozplavbe pláva 6 plavcov. Koľkými spôsobmi si môžu vylosovať plavecké dráhy, ak v bazéne je 6 dráh?

3. V triede je 24 žiakov. Koľko možností má triedna učiteľka, ak chce spomedzi žiakov náhodne vybrať troch, ktorí sa zúčastnia celoškolského podujatia?

4. Katka chce na obrázku vyfarbiť tri rôzne kvety a má 6 farbičiek rôznych farieb.

a) Koľkými spôsobmi ich môže vyfarbiť, ak každý kvet bude mať inú farbu?

b) Koľko spôsobov existuje, ak niektoré kvety môžu mať aj rovnakú farbu?

5. V triede sa vyučuje 10 predmetov.

a) Koľko rôznych rozvrhov hodín sa dá vytvoriť na jeden deň na 1. až 6. hodinu, ak sa žiaden predmet v rozvrhu nevyskytuje viackrát a trieda sa nedelí na skupiny?
b) Koľko z týchto rozvrhov je takých, že 1. hodina je matematika?
c) Koľko z týchto rozvrhov je takých, že v nich vôbec nie je matematika?
d) Koľko z týchto rozvrhov je takých, že je v nich matematika a angličtina bezprostredne vedľa seba?

6. Skupina 12 chlapcov sa ubytovala v ubytovni. Koľkými rôznymi spôsobmi sa mohli ubytovať, ak boli k dispozícii tri 2-posteľové a dve 3-posteľové izby? (Každá izba mala svoje číslo, ale postele neboli číslované.)

7. Koľko slov (aj nezmyselných) možno vytvoriť zo všetkých písmen týchto slov?

a) MED b) STUHA c) MATKA d) KOLOTOČ e) MATEMATIKA

8. V rovine je daných 9 bodov. Koľko priamok môžeme nimi preložiť, ak:

a) žiadne tri body neležia na jednej priamke,
b) práve 5 bodov leží na jednej priamke a žiadne iné 3 body neležia na jednej priamke?

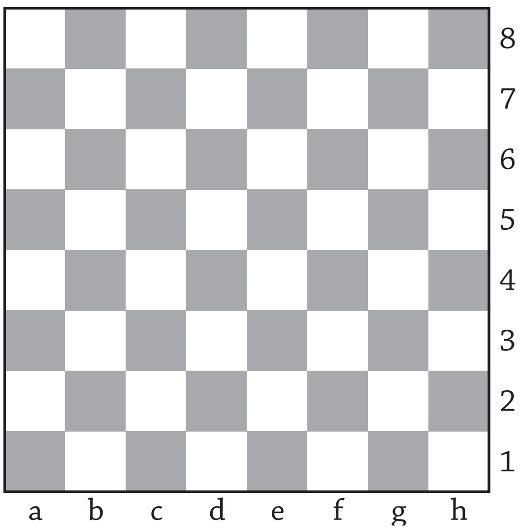
9. Na pomaturitnom stretnutí po rokoch si pri prípitku každý účastník štrngol s každým. Uskutočnilo sa 171 štrngnutí. Koľko ľudí bolo na stretnutí?

10. Na šachovnici je položená figúrka v ľavom dolnom rohu a môžeme ju posúvať len smerom doprava alebo hore.

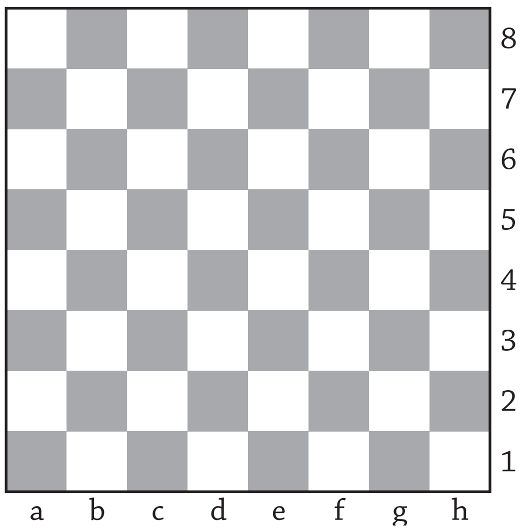
a) Koľko existuje rôznych možností, ako môžeme týmto spôsobom dostať figúrku do pravého horného rohu?
b) Koľko je takých možností, pri ktorých figúrka prechádza políčkom f5?

Návod: Do každého políčka si zapíšte, koľkými spôsobmi sa naň môže figúrka dostať.

a)



b)



PRAVDEPODOBNOSŤ

Náhodný hromadný dej je dej, ktorého výsledok nie je vopred jednoznačne určený (nemožno ho vopred jednoznačne predpovedať) a ktorý sa vyskytuje opakovane – jeho výsledok teda môžeme zistiť vo veľkom počte prípadov. (Napr. hádzanie hracou kockou alebo mincou, opakované meranie nejakej veličiny...)

Relatívna početnosť hromadného náhodného javu je *podiel počtu pokusov s priaznivým výsledkom a počtu všetkých pokusov*. (Napr. ak pri 100 hodoch kockou šestka padne 19-krát, je relatívna početnosť padnutia šestky 19/100, 0,19 alebo 19 %.) Čím väčší je počet pokusov, tým viac sa relatívna početnosť deja približuje teoreticky vypočítanej pravdepodobnosti.

Klasická (Laplaceova) definícia pravdepodobnosti: Daná je konečná množina Ω (jej prvky sú výsledky pokusu, ktoré sú rovnocenné z hľadiska toho, ako často nastávajú). Náhodný jav (dej, udalosť) A je každá podmnožina množiny Ω ($A \subset \Omega$).

Pravdepodobnosť javu *A* je číslo $p(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{\textit{počet priaznivých možností}}{\textit{počet všetkých možností}}$.

Vlastnosti pravdepodobnosti:

$\forall A, B \subset \Omega$

a) $0 \leq p(A) \leq 1$

b) $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

d) $A \cup A' = \Omega \Rightarrow p(A') = 1 - p(A)$

A je **istý jav**
(vždy nastane) $\Rightarrow p(A) = 1$

A je **nemožný jav**
(nikdy nenastane) $\Rightarrow p(A) = 0$

A´ je **doplnkový jav k javu *A***

Nezávislé javy sú také javy, pre ktoré uskutočnenie jedného javu nemá vplyv na uskutočnenie alebo neuskutočnenie druhého javu. (Napr. výsledok druhého hodu kockou nezávisí od výsledku prvého hodu.)

Pravdepodobnosť, že nastanú obidva nezávislé javy *A* a *B*, vypočítame ako **súčin pravdepodobností** týchto javov: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Bernoulliho schéma: Nech sa náhodný pokus skladá z *n* nezávislých čiastkových pokusov, ktorých priaznivý výsledok nastane s pravdepodobnosťou *p*. Potom pravdepodobnosť, že priaznivý výsledok čiastkových pokusov nastane práve *k*-krát, je: $p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Geometrická pravdepodobnosť: Nech nejaký útvar Ω obsahuje útvar *A* ($A \subset \Omega$). Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod z útvaru Ω bude ležať v útvare *A*, je $p(A) = \dfrac{d(A)}{d(\Omega)}$, $p(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$, $p(A) = \dfrac{V(A)}{V(\Omega)}$, kde *d* je dĺžka, *S* je obsah, *V* je objem útvarov.

Slovné úlohy – Laplaceova schéma, vlastnosti pravdepodobnosti

1. Hoďte 100-krát hracou kockou, do tabuľky zapíšte, koľkokrát vám padli čísla 1 – 6 (absolútna početnosť) a vypočítajte relatívnu početnosť padnutia 1 – 6.

Číslo na kocke	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Absolútna početnosť						
Relatívna početnosť						

Do druhej tabuľky zapíšte údaje, ktoré získate z hodov kockou všetkých žiakov v triede (alebo skupiny 4 - 10 žiakov).

Číslo na kocke	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Absolútna početnosť						
Relatívna početnosť						

2. Vypočítajte pravdepodobnosti, že pri hode kockou padnú čísla 1, 2, ..., 6. V ktorej tabuľke sa hodnoty relatívnej početnosti viac približujú k hodnote vypočítanej pravdepodobnosti?

3. Vypočítajte pravdepodobnosť, že pri hode kockou padne:

a) párne číslo,

b) číslo menšie ako 3,

c) číslo väčšie ako 3 alebo nepárne.

4. Vo vrecúšku sú 4 biele a 10 čiernych guľôčok. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá guľôčka bude čierna?

5. Z vrecúška, v ktorom sú 4 biele a 10 čiernych guľôčok, vytiahneme náhodne 3 guľôčky. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) všetky budú čierne, b) 2 budú čierne a 1 biela, c) všetky budú rovnakej farby?

6. Na kartičkách máme napísané číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7. Vyberieme štyri kartičky a náhodne ich uložíme vedľa seba. Určte pravdepodobnosť, že vytvorené štvorciferné číslo bude:

a) párne, b) obsahovať len nepárne číslice, c) väčšie ako 6 000.

7. Na papier náhodne napíšeme trojciferné číslo (cifry v čísle sa môžu opakovať, nula nemôže byť na začiatku). Vypočítajte pravdepodobnosť, že napísané číslo bude:

a) deliteľné 10, b) obsahovať tri rovnaké cifry, c) nepárne.

8. Aká je pravdepodobnosť, že číslom 13 je deliteľné:

a) jednociferné prirodzené číslo, b) dvojciferné prirodzené číslo?

9. Z 10 jogurtov, ktoré sú uložené v regáli obchodu, sú 3 po dátume spotreby. Zákazník si kúpil 5 jogurtov, ale nepozrel si dátum spotreby. Aká je pravdepodobnosť, že si kúpil:

a) všetky jogurty pred dátumom spotreby,
b) práve jeden jogurt po dátume spotreby,
c) aspoň jeden jogurt po dátume spotreby,
d) všetky jogurty po dátume spotreby?

10. Vlaková súprava má na začiatku rušeň a za ním 7 vozňov, medzi ktorými je jeden jedálensky vozeň a jeden vozeň pre matky s deťmi. Vozne boli zoradené náhodne. Aká je pravdepodobnosť, že jedálenský vozeň a vozeň pre matky s deťmi sú vedľa seba?

11. Pravdepodobnosť, že študent školy má skejtbord, je 0,34, pravdepodobnosť, že má bicykel, je 0,81 a pravdepodobnosť, že má skejtbord aj bicykel, je 0,22. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybratý študent má skejtbord alebo bicykel?

12. Z balíčka 32 sedmových kariet vytiahneme náhodne tri karty naraz. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) všetky vytiahnuté karty budú žalude,
b) všetky vytiahnuté karty budú esá,
c) vytiahneme 2 esá a 1 kráľa,
d) nevytiahneme žiadne eso?

13. Učiteľ losuje, ktorý z ôsmich príkladov bude na písomke. Sú dve možnosti losovania. Buď hodí pravidelným osemstenom, alebo hodí naraz dvoma hracími kockami. Príklad č. 7 bude na písomke, ak na osemstene padne číslo 7 alebo pri druhom losovaní, ak na dvoch kockách padne súčet 7. Pri ktorom losovaní má príklad 7 väčšiu šancu dostať sa do písomky?

14. V číselnej lotérii losujú 5 zo 45 čísel. Aká je pravdepodobnosť, že ak podáme len jeden tiket, vyhráme prvú cenu, t. j. uhádneme všetky vytiahnuté čísla?

15. V triede je 17 dievčat a 13 chlapcov. Učiteľ na hodine vyvolá 3 žiakov. Aká je pravdepodobnosť, že odpovedať budú:

a) 3 dievčatá,

b) 1 dievča a 2 chlapci?

16. Na školskom turnaji v basketbale sa hralo 10 zápasov. Organizátori umožnili pred turnajom tipovať pre každý zápas výhru, remízu alebo prehru družstva uvedeného na prvom mieste. Aká je pravdepodobnosť, že pri náhodnom tipovaní správne uhádnete výsledky všetkých zápasov?

Nezávislosť javov, Bernoulliho schéma

1. Hádžeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) 6 padne na oboch kockách,

b) 6 padne práve na jednej kocke,

c) 6 padne aspoň na jednej kocke,

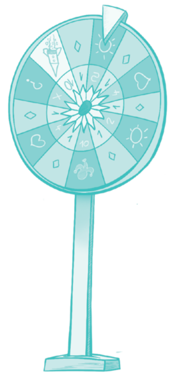
d) 6 padne na žiadnej kocke?

2. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode troma hracími kockami padne na prvej 3 alebo 4, na druhej párne a na tretej nepárne číslo?

3. Traja strelci strieľajú – každý raz – na ten istý terč. Prvý zasiahne terč s pravdepodobnosťou 0,7. Druhý s pravdepodobnosťou 0,8 a tretí s pravdepodobnosťou 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že:

a) terč zasiahnu všetci traja strelci,

b) terč nezasiahne žiaden strelec,



c) terč zasiahne aspoň jeden strelec,

d) terč zasiahnu aspoň dvaja strelci.

4. Hádžeme päťkrát hracou kockou. Aká je pravdepodobnosť, že

a) pri všetkých hodoch padne párne číslo,

b) pri všetkých hodoch padne 6,

c) najviac pri jednom hode padne 6,

d) aspoň pri dvoch hodoch padne 6?

5. Na stonke ľalie sú tri púčiky. Každý jej púčik vykvitne s pravdepodobnosťou 0,84. Pravdepodobnosť akého javu vyjadrujú nasledujúce čísla?

a) $0{,}84^3$

b) $0{,}16^3$

c) $1 - 0{,}84^3$

6. Z dlhodobých štatistík je známe, že pravdepodobnosť narodenia chlapca je 0,51. Aká je pravdepodobnosť, že v rodine so 4 deťmi:

a) sa narodia prví 3 chlapci a potom dievča,

b) sa narodia 3 chlapci a 1 dievča,

c) sa narodia 4 dievčatá,

d) sa narodí aspoň jeden chlapec?

7. Hodíme osemkrát hracou kockou. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) prvýkrát, tretíkrát a šiestykrát padne šestka, v ostatných hodoch nie,

b) päťkrát šestka nepadne a posledné tri hody áno,

c) šestka padne práve trikrát?

8. Hráč basketbalu premení trestný hod s pravdepodobnosťou 0,72. Aké sú pravdepodobnosti, že tento hráč premení:

a) všetky 4 po sebe nasledujúce trestné hody,

b) aspoň 8 z 10 po sebe nasledujúcich trestných hodov?

9. Študent má vypracovať test, ktorý obsahuje 10 otázok. Pri každej z nich vyberá jednu z 5 odpovedí, pričom práve jedna je správna. Študent sa na test nepripravil, a preto odpovede volí náhodne. Aké sú pravdepodobnosti, že študent zodpovie správne:

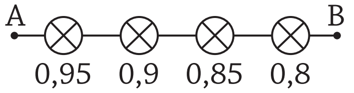
a) najviac 3 otázky,

b) aspoň 4 otázky,

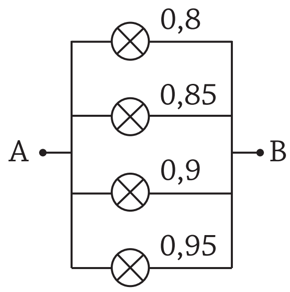
c) všetkých 10 otázok?

10. Určte pravdepodobnosť, že medzi bodmi A a B, ktoré sú pripojené na zdroj napätia, preteká elektrický prúd, ak poznáme pravdepodobnosti, že jednotlivé žiarovky sú funkčné (predpokladáme nezávislosť porúch žiaroviek).

a) Žiarovky sú zapojené sériovo.



b) Žiarovky sú zapojené paralelne.



11. Výrobný podnik expedoval zásielku, ktorá obsahovala 100 procesorov. Pravdepodobnosť, že sa jeden procesor cestou poškodí, je 0,05 (nezávisle od ostatných). Vypočítajte pravdepodobnosť, že sa počas prepravy poškodí najviac 5 procesorov.

12. Z balíčka 32 sedmových kariet vytiahneme náhodne štyri karty za sebou. Karty do balíčka nevraciame. Aká je pravdepodobnosť, že eso vytiahneme až na štvrtýkrát?

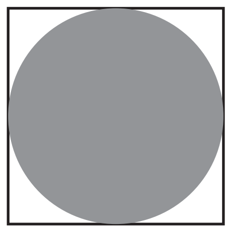
Geometrická pravdepodobnosť

1. Na prípojke káblovej televízie medzi mestami *M* a *N* došlo k poruche. Vzdialenosť medzi týmito mestami je 8 km. Aká je pravdepodobnosť, že k poruche kábla došlo na prvých 200 metroch od mesta *M*?

2. Hodiny, ktoré neboli v stanovenú dobu natiahnuté, sa po určitom čase zastavia. Aká je pravdepodobnosť, že sa veľká ručička zastaví medzi jednotkou a trojkou?

3. Anka je dohodnutá s kamarátom, že jej zavolá na mobil v čase od 7:30 do 9:00. Vyučovanie jej začína o 8:00, každá vyučovacia hodina trvá 45 minút a prestávka 10 minút. Aká je pravdepodobnosť, že jej kamarát nezavolá počas hodiny?

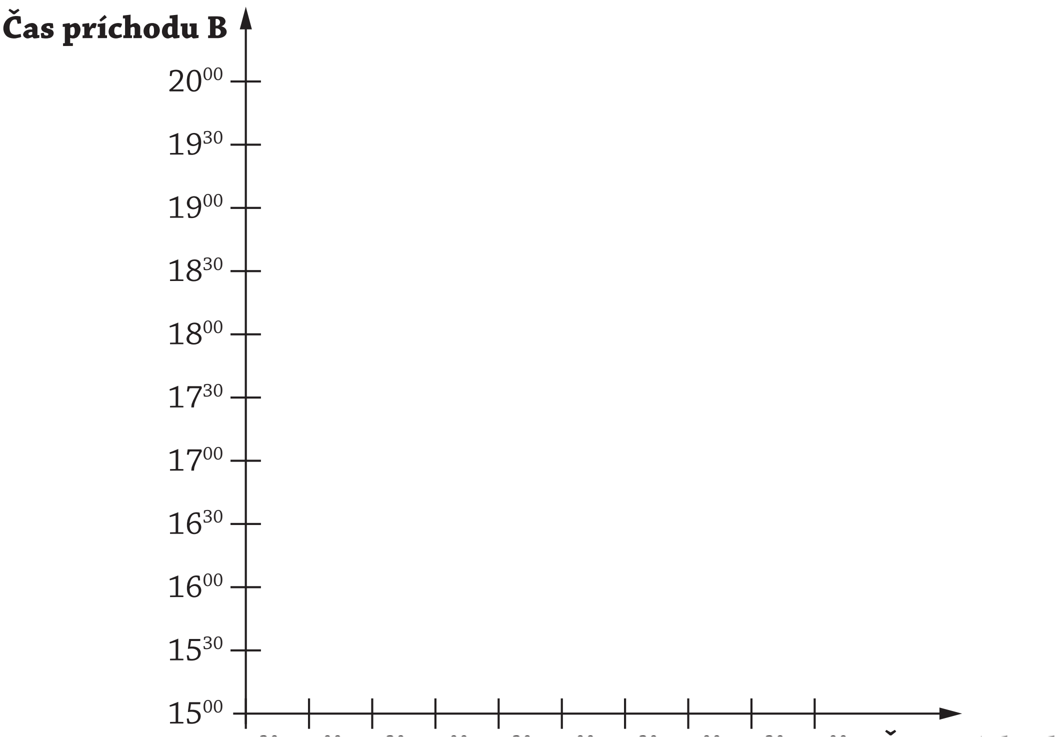
4. Do štvorca vpíšme kruh. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybratý bod štvorca bude bodom kruhu?



5. Aká je pravdepodobnosť, že meteor dopadne na tú časť zemegule, kde je pevnina? 149 mil. km^2 povrchu zeme je pevnina a 361 mil. km^2 pokrývajú moria a oceány.

6.* Kamaráti Andrej a Boris prichádzajú do tej istej posilňovne každý pondelok medzi 15. a 20. hodinou. Predpokladáme, že Andrej a Boris prichádzajú nezávisle od seba a príchod každého z nich je rovnako pravdepodobný počas celého päťhodinového intervalu. Vieme, že Andrej cvičí v posilňovni 1 hodinu a Boris 1,5 hodiny. Určte pravdepodobnosť, že Andrej a Boris sa v posilňovni stretnú.

Návod: V súradnicovej sústave, kde na osiach vyznačíte časy príchodu Andreja a Borisa, vyšrafujte plochu vyjadrujúcu situáciu, že sa v posilňovni stretnú.



FUNKCIE A ICH VLASTNOSTI

V bežnom živote, ako aj v prírodných a humanitných vedách často potrebujeme vyjadriť závislosti medzi veličinami (napr. mzda brigádnika závisí od počtu odpracovaných hodín, prejdená dráha závisí od času jazdy auta). Meniace sa veličiny zachytávame v matematike pomocou funkcií.

Funkciou nazývame priradenie, ktoré každému prvku množiny D priradí **práve jedno** reálne číslo. Množina D sa nazýva **definičný obor** funkcie.

Množinu všetkých reálnych čísel, ktoré sú priradené funkciou prvkom jej definičného oboru, nazývame **obor hodnôt funkcie** a označujeme ho H.

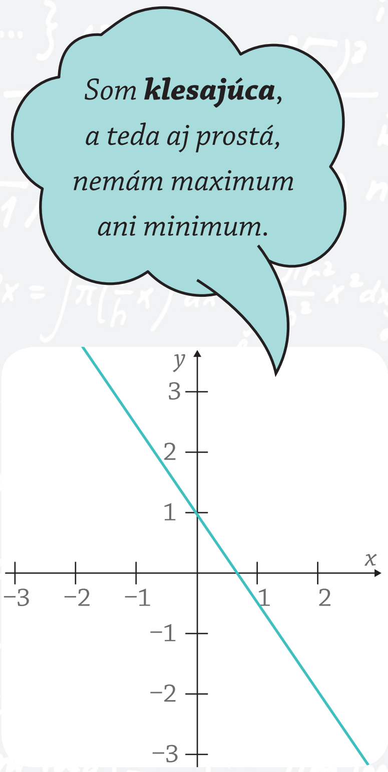
Prvky množiny D sú **nezávislé premenné** (sú dané alebo si ich volíme) a označujeme ich väčšinou x. Prvky množiny H sú **závislé premenné** (menia sa v závislosti od x, čiže ich vypočítame) a označujeme ich obvykle y. Funkcie označujeme písmenami f, g, h...

Používame všeobecné zápisy: $y = f(x)$, $f : x \longrightarrow y$, $[x, y] \in f$ alebo zápisy s konkrétnymi hodnotami: $7 = f(3)$, $f : 3 \longrightarrow 7$, $[3, 7] \in f$.

Graf funkcie je množina bodov so súradnicami $[a, f(a)]$, kde $a \in D$. Grafom funkcie sú súvislé čiary, ale aj izolované body.

Funkcia môže byť určená:
- analyticky, t. j. predpisom zapísaným „vzorcom" ($f : y = 2x + 1$, $g : y = x^2$, $h : y = 3^x$),
- grafom,
- vymenovaním prvkov v tabuľke, šípkovom diagrame, zápisom množiny usporiadaných dvojíc ($f = \{[3, 7], [5, 1], [8, -2]\}$),
- slovným opisom.

Vlastnosti funkcií



Niektoré veci sú jednoduché, iné zasa zložité.

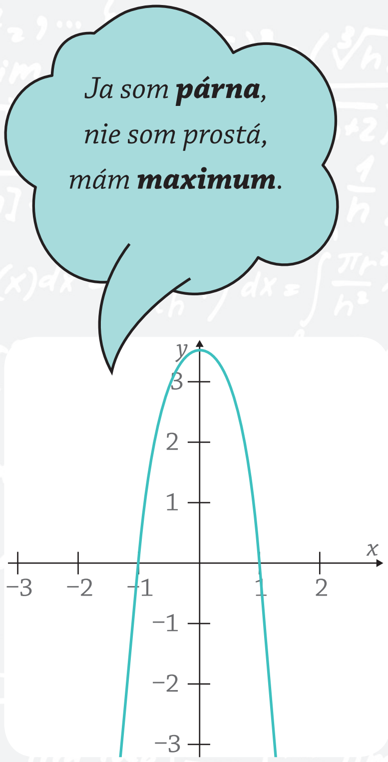
Niektoré funkcie sú prosté, iné nie sú prosté.

Deti väčšinou rastú – sú rastúce.

Funkcie môžu byť rastúce, niektoré sú však klesajúce a mnohé nie sú ani rastúce, ani klesajúce.

Ľudia majú rôzne hodnoty.

Pri funkciách nás zaujíma definičný obor a obor hodnôt.



Definičný obor funkcie:

$D(f) = \{x \in R, \exists y \in R, [x, y] \in f\}$

Obor hodnôt funkcie:

$H(f) = \{y \in R, \exists x \in R, [x, y] \in f\}$

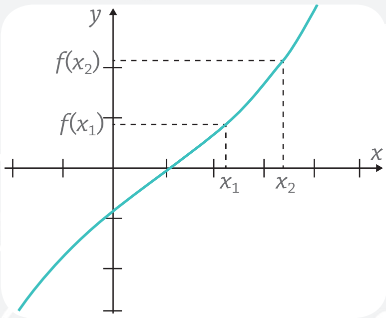
Monotónnosť funkcie:

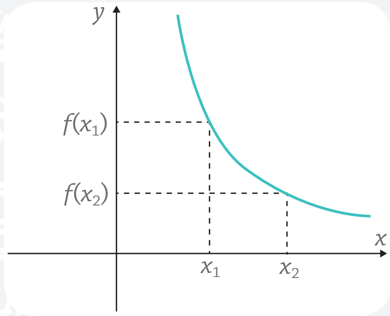
f je rastúca na množine $M \subset D(f) \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in M$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f je klesajúca na množine $M \subset D(f) \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in M$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ak $M = D(f)$, potom je funkcia rastúca (klesajúca).

f je **prostá** $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$





*Funkcia je **rastúca** (so zväčšujúcou sa hodnotou x sa zväčšujú funkčné hodnoty) a **prostá** (pre rôzne hodnoty x sú rôzne aj funkčné hodnoty)*

*Funkcia je **klesajúca** (so zväčšujúcou sa hodnotou x sa zmenšujú funkčné hodnoty) a **prostá** (pre rôzne hodnoty x sú rôzne aj funkčné hodnoty)*

Extrémy funkcie:

f má v bode $a \in D(f)$ maximum $\Leftrightarrow \forall\, x \in D(f) : f(x) \leq f(a)$

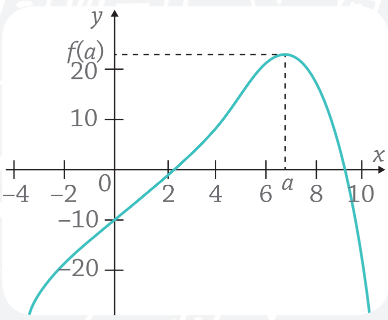
f má v bode $a \in D(f)$ minimum $\Leftrightarrow \forall\, x \in D(f) : f(x) \geq f(a)$

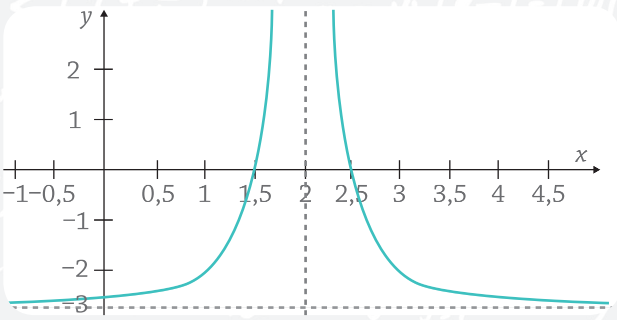
Maximum (minimum) môžeme definovať aj na množine $M \subset D(f)$.

Ohraničenosť funkcie:

f je zdola ohraničená $\Leftrightarrow \exists\, d \in R, \forall\, x \in D(f) : f(x) \geq d$

f je zdola ohraničená $\Leftrightarrow \exists\, h \in R, \forall\, x \in D(f) : f(x) \leq h$





Funkcia má maximum v bode a, je zhora ohraničená, je rastúca na intervale (-∞, a), je klesajúca na intervale (a, ∞),
$D(f) = R$, $H(f) = (-\infty, f(a)\rangle$

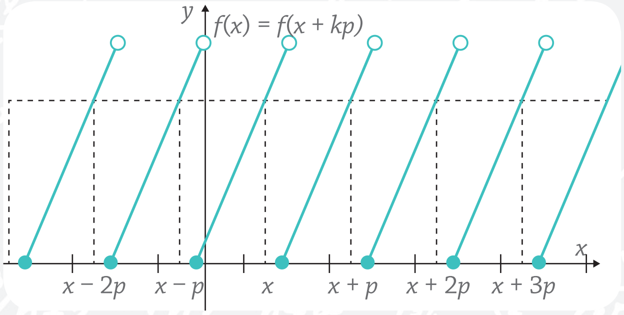
Funkcia nemá maximum ani minimum, je zdola ohraničená, zhora nie je ohraničená, je rastúca na intervale (-∞, 2), je klesajúca na intervale (2, ∞),
$D(f) = R - \{2\}$, $H(f) = (-3, \infty)$

Periodickosť funkcie:

f je periodická $\Leftrightarrow \exists p \in R^{+}, \forall k \in Z:$

$[\forall x \in R: x \in D(f) \Longrightarrow x + k \cdot p \in D(f)] \wedge$

$\wedge\ [\forall x \in D(f): f(x + k \cdot p) = f(x)]$

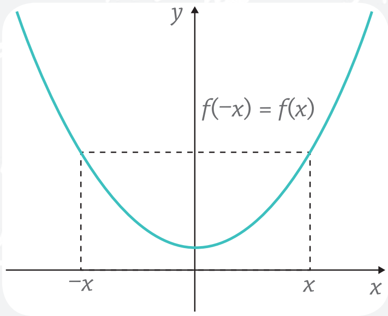


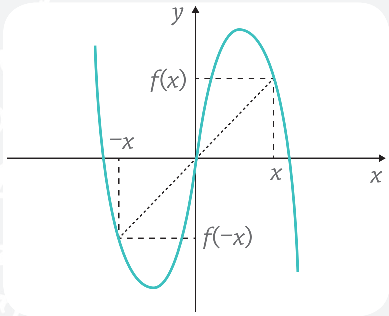
Funkcia je periodická (funkčné hodnoty sa pravidelne opakujú), nie je prostá, je ohraničená zdola aj zhora

Parita funkcie:

f je párna $\Leftrightarrow [\forall x \in R: x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)] \wedge [\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)]$

f je nepárna $\Leftrightarrow [\forall x \in R: x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)] \wedge [\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)]$



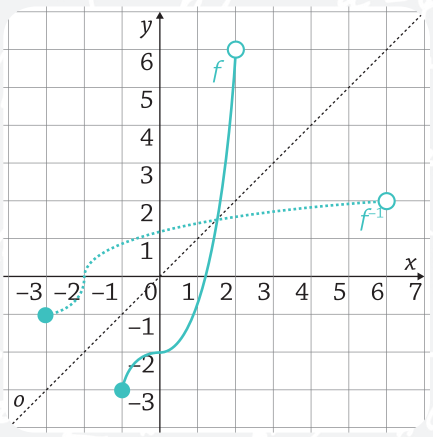


*Funkcia je **párna** (graf je osovo súmerný podľa osi y), nie je prostá, má minimum*

*Funkcia je **nepárna** (graf je stredovo súmerný podľa počiatku), nie je prostá*

Inverzná funkcia:

Nech f je **prostá funkcia** na množine A, nech B je jej obor hodnôt. Funkciu g z množiny B do množiny A definovanú predpisom $g(b) = a$ práve vtedy, keď $f(a) = b$, nazývame **inverznou funkciou k funkcii f**. Inverznú funkciu k funkcii f označujeme $\boldsymbol{f^{-1}}$.



$f(-1) = -3,\ f^{-1}(-3) = -1$ | $[-1, -3] \in f,\ [-3, 1] \in f^{-1}$

$f(0) = -2,\ f^{-1}(-2) = 0$ | $[0, -2] \in f,\ [-2, 0] \in f^{-1}$

$D(f) = \langle -1, 2)$ | $H(f) = \langle -3, 6)$

$D(f^{-1}) = \langle -3, 6)$ | $H(f^{-1}) = \langle -1, 2)$

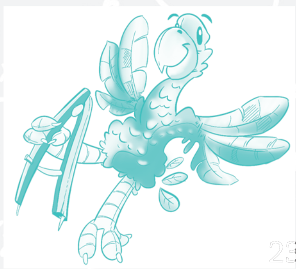
f je rastúca, f^{-1} je rastúca

Grafy funkcií f a f^{-1} sú osovo súmerné podľa priamky o: $y = x$.

$D(f^{-1}) = H(f),\ H(f^{-1}) = D(f)$

$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

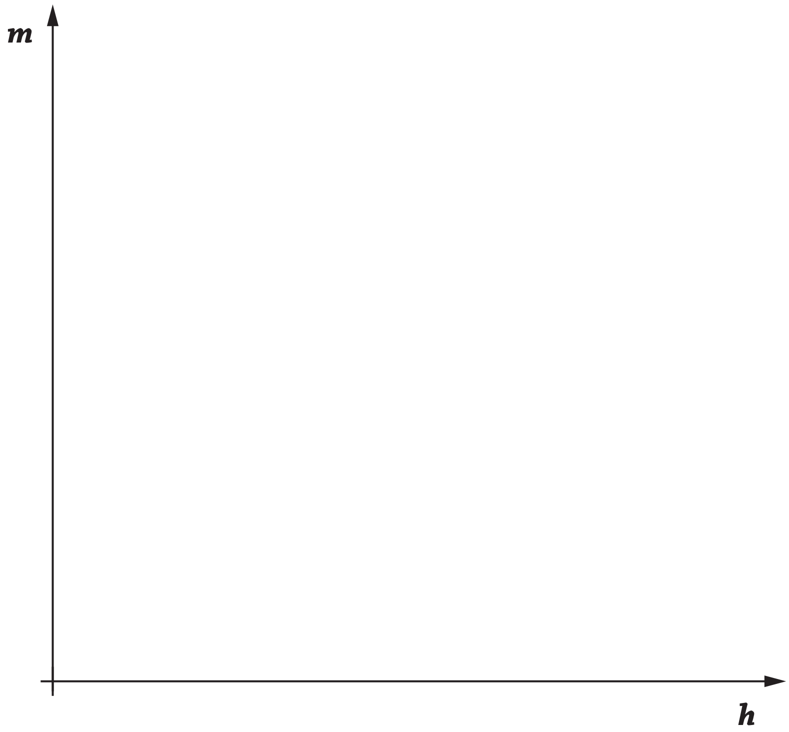
$(f^{-1})^{-1} = f$



Funkcie

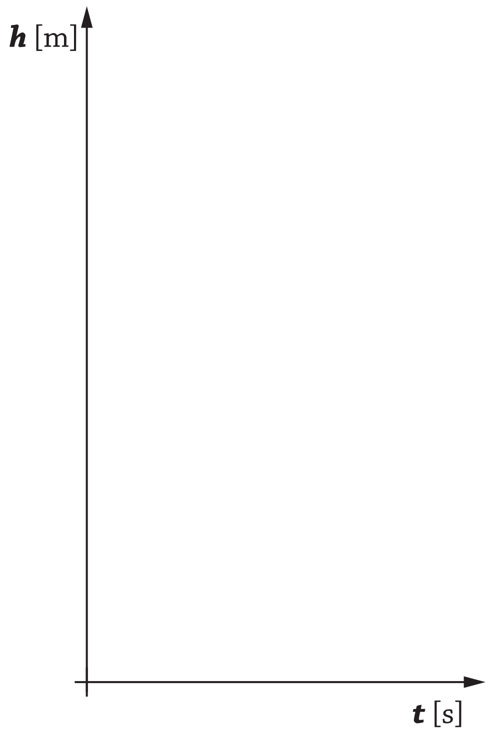
1. Hrubá hodinová mzda brigádnika je 3 €. Vyjadrite tabuľkou, rovnicou aj grafom závislosť hrubej mzdy od počtu odpracovaných hodín. Aká bude hrubá mzda brigádnika, ktorý za mesiac odpracoval 65 hodín?

Počet hodín ***h***	Hrubá mzda ***m*** v €
0	
1	
2	
3	
5	
10	
20	
30	
50	
65	



2. Z 80 metrov vysokej veže padá loptička voľným pádom. (Voľný pád je rovnomerne zrýchlený pohyb a pre jeho dráhu platí vzťah $s = \frac{g \cdot t^2}{2}$, kde $g = 10\ m \cdot s^{-2}$ je tiažové zrýchlenie.) Vyjadrite tabuľkou, rovnicou aj grafom závislosť vzdialenosti loptičky od zeme od času pádu loptičky. Po koľkých sekundách dopadne loptička na zem?

Čas pádu ***t*** loptičky v sekundách	Vzdialenosť ***h*** loptičky od zeme v metroch
0	80
1	
2	



3. Sú tieto priradenia funkcie? Zakrúžkujte správnu odpoveď.

a) Každému prirodzenému číslu priradíme jeho ciferný súčet. Áno – Nie

b) Každému prirodzenému číslu priradíme všetky čísla, ktorými je deliteľné bez zvyšku. Áno – Nie

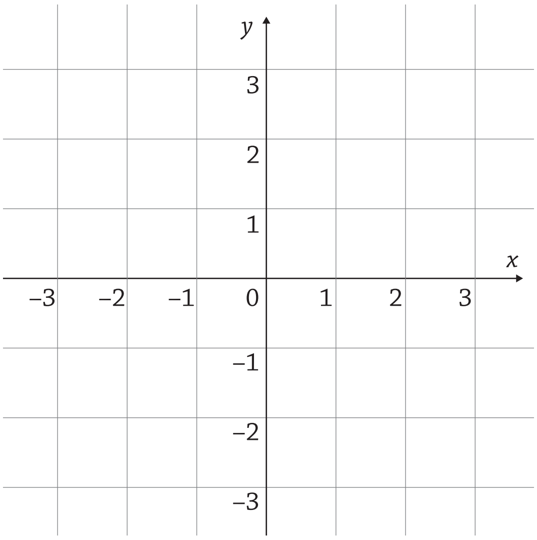
c) Každému futbalovému klubu priradíme všetkých hráčov, ktorí v ňom hrajú. Áno – Nie

d) Každému žiakovi triedy priradíme mesiac, v ktorom sa narodil. Áno – Nie

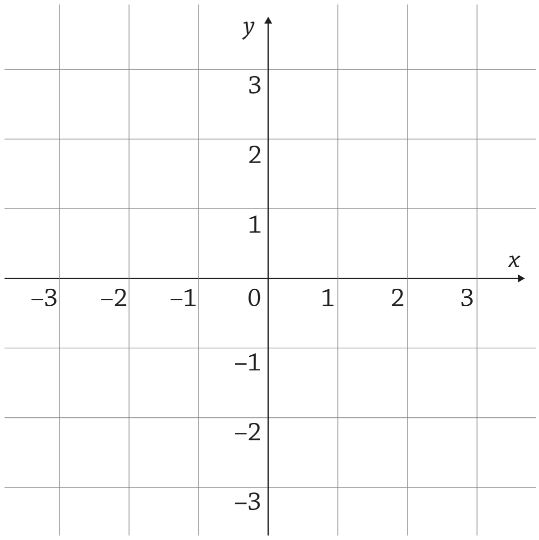
e) Každému členovi rodiny priradíme jeho výšku. Áno – Nie

4. Načrtnite v súradnicovej sústave množiny usporiadaných dvojíc reálnych čísel a rozhodnite, či sú to funkcie. V prípade funkcie určte jej definičný obor a obor hodnôt.

$f = \{[-2, 1], [-1, 3], [1, -2], [2, 3], [1, -3]\}$

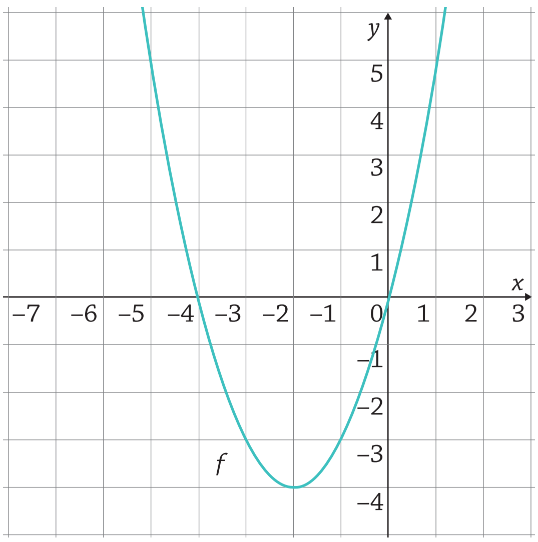


$g = \{[-2, 2], [0, -2], [1, 2], [2, 3], [3, -3]\}$

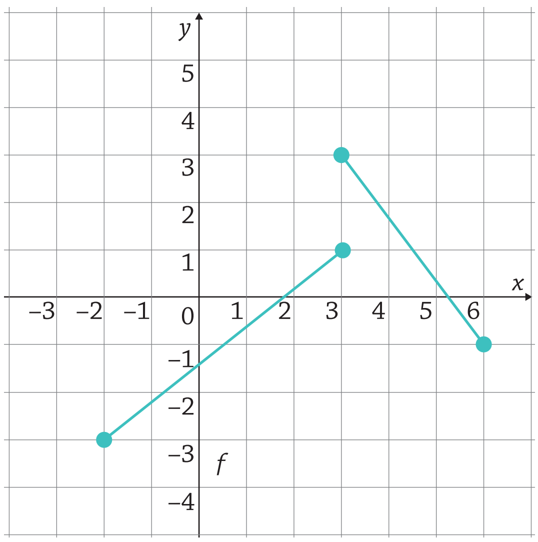


5. Rozhodnite, na ktorých obrázkoch je graf funkcie. V prípade funkcií určte ich definičný obor a obor hodnôt.

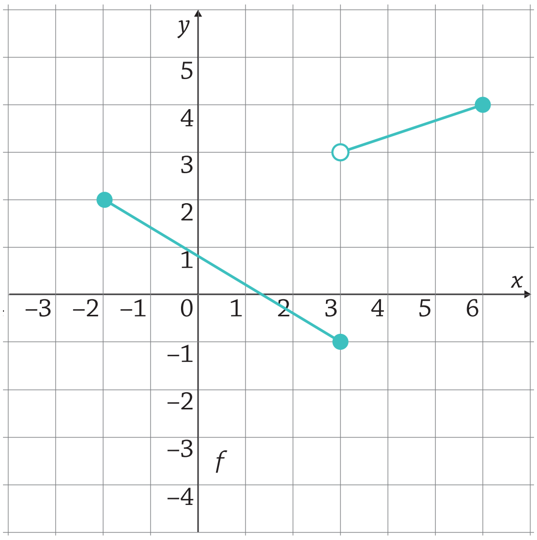
a)



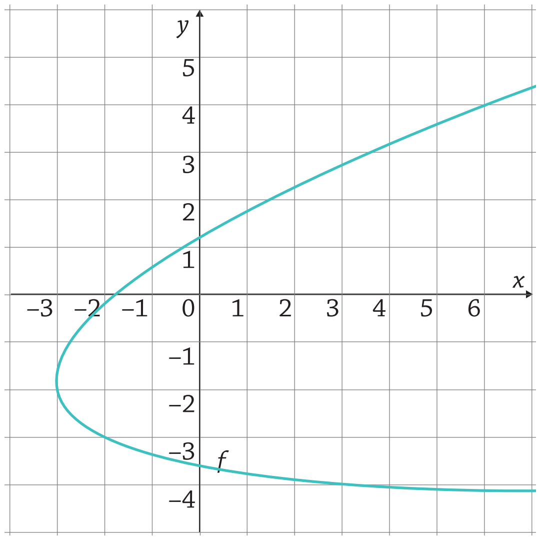
b)



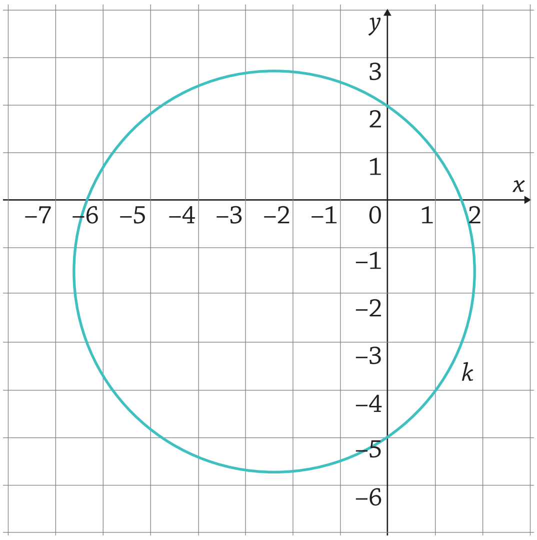
c)



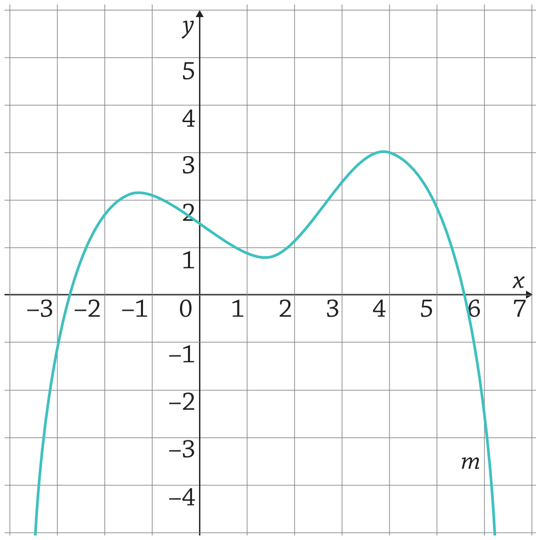
d)



e)



f)



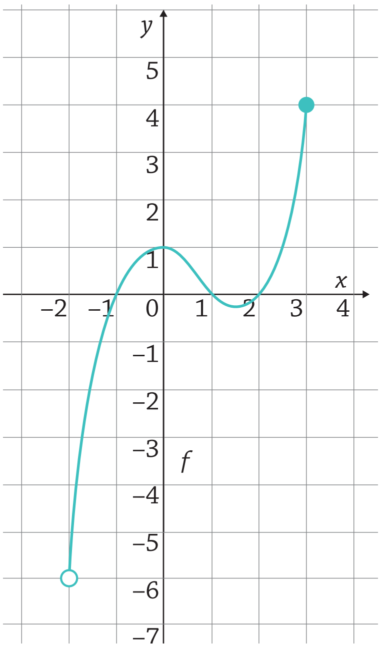
6. Daná je funkcia $f : y = -3x + 6$.

a) Vypočítajte $f(3)$, $f(0)$, $f(-2)$.

b) Pre ktoré x platí $f(x) = 2$, $f(x) = -4$?

c) Vypočítajte súradnice priesečníkov funkcie s osami súradnicovej sústavy.

7. Potrebné hodnoty odčítajte z grafu funkcie na obrázku a doplňte chýbajúce údaje.



Definičný obor funkcie je $D(f)$ =

Obor hodnôt funkcie je $H(f)$ =

$f(-1) =$ $f(0) =$

Určte x, pre ktoré platí $f(x) = 4$.

Určte súradnice všetkých bodov, v ktorých graf funkcie pretína os x.

Určte, či sú tieto funkčné hodnoty kladné alebo záporné. Doplňte znaky nerovnosti:

$f(-1{,}7)$ ...... 0, $f(-0{,}6)$ ...... 0, $f(0{,}3)$ ...... 0, $f(1{,}5)$ ...... 0, $f(2{,}8)$ 0

Určte všetky $x \in D(f)$, pre ktoré platí $f(x) > 0$.

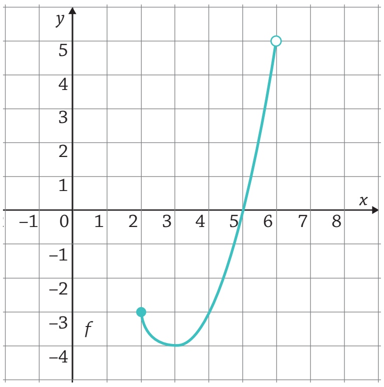
Určte všetky $x \in D(f)$, pre ktoré platí $f(x) \leq 0$.

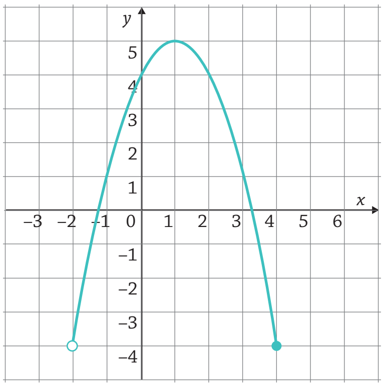
8. Zistite, či čísla −4 a 3 patria do oboru hodnôt funkcie $f: y = \dfrac{3x-2}{x-1}$.

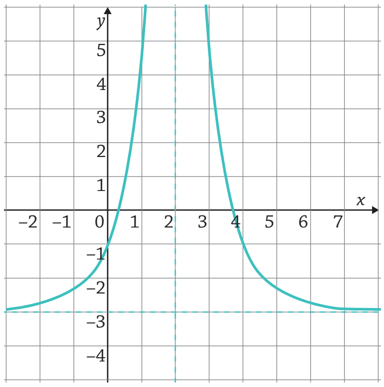
9. Určte definičný obor funkcií: $f: y = 2x^3 - 5$, $g: y = \dfrac{x+3}{(x+5)(x-2)}$, $h: y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{(x+6)(x-1)}$.

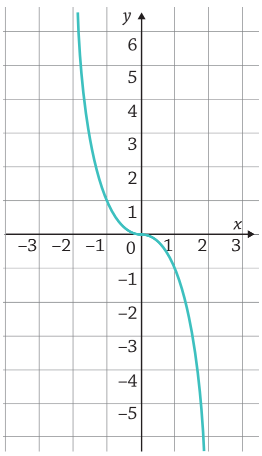
Vlastnosti funkcií

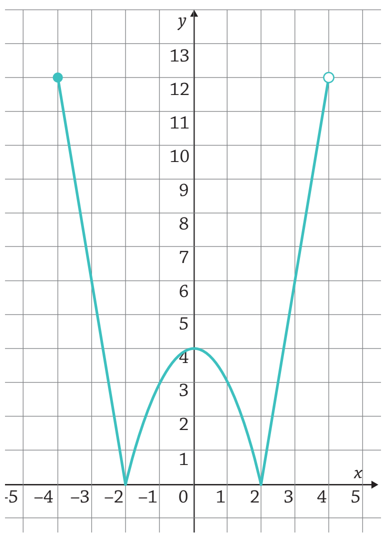
1. Určte $D(f)$, $H(f)$, intervaly monotónnosti funkcie (kde je rastúca alebo klesajúca), body, v ktorých má extrémy (maximum alebo minimum), a určte, či je funkcia ohraničená zdola alebo zhora.

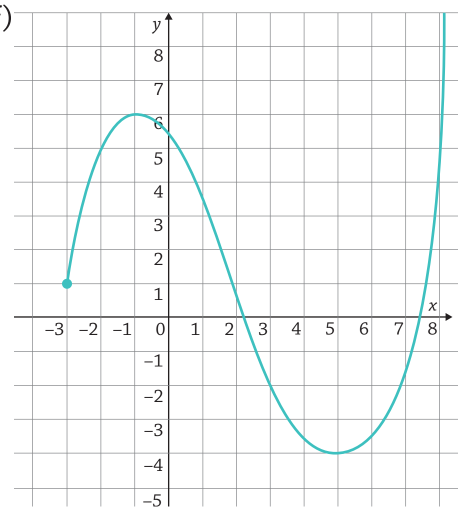
a)


b)


c)


d)


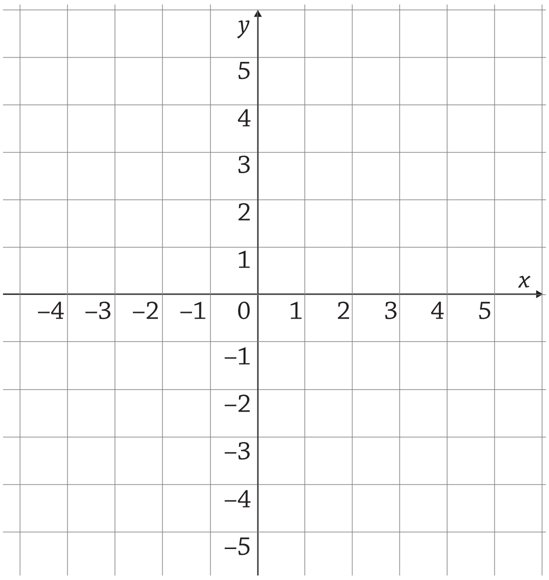
e)


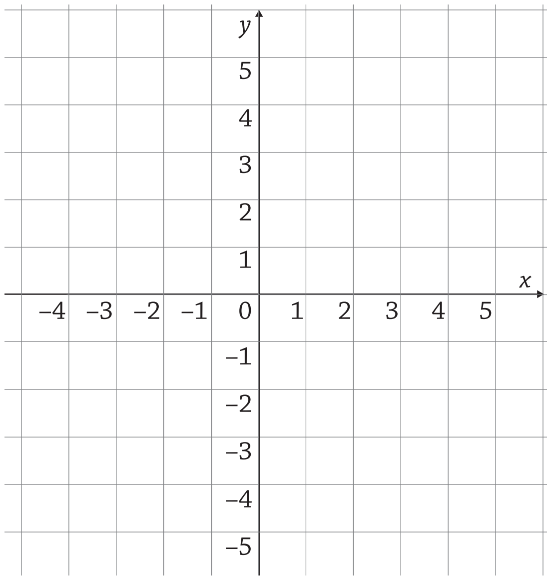
f)


2. Načrtnite graf funkcie, ktorá má tieto vlastnosti:

a) je rastúca, nemá maximum, je zhora ohraničená, má minimum, je zdola ohraničená,

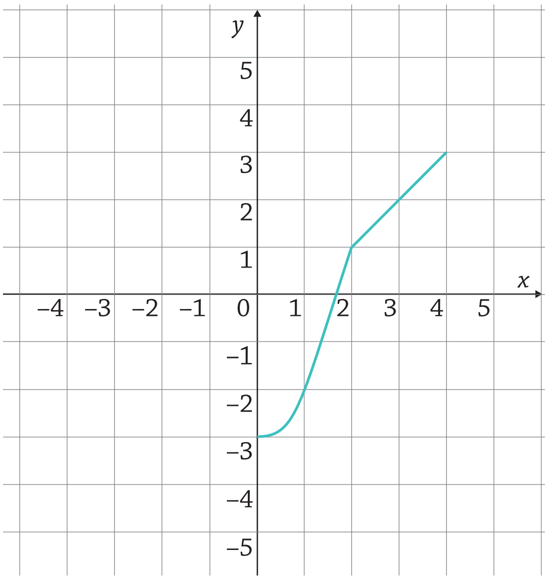
b) definičný obor je interval ⟨−3, 2), obor hodnôt je interval (−4, 3⟩, nie je prostá, má maximum.



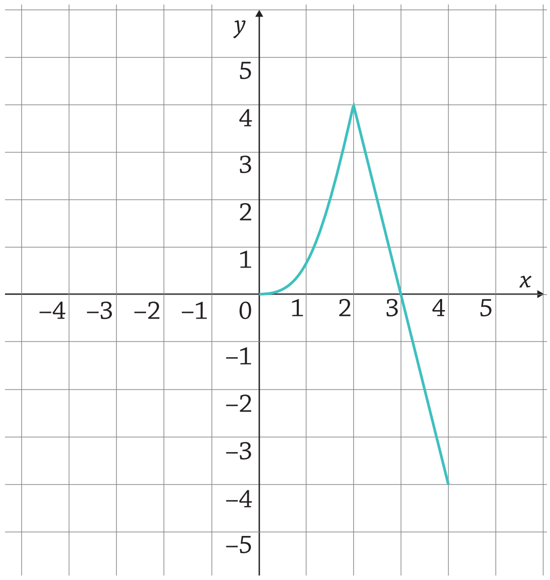


3. Dokreslite graf tak, aby funkcia bola:

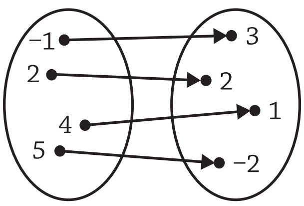
a) párna,

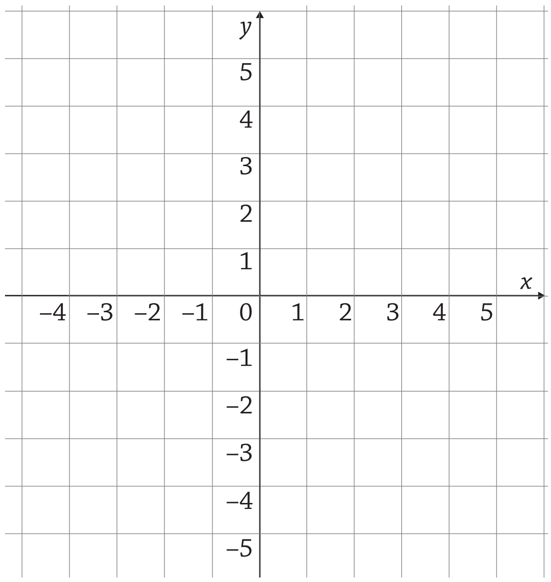


b) nepárna.



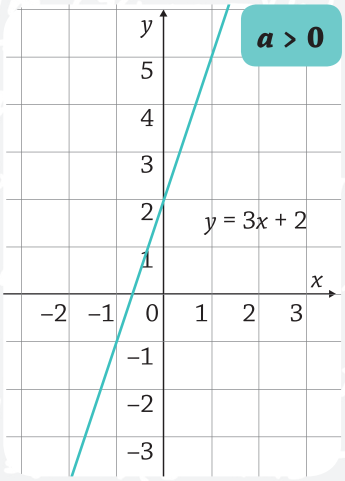
4. Funkcia f je daná šípkovým diagramom. Zistite, či je funkcia f prostá, a doplňte v tom istom obrázku šípkový diagram inverznej funkcie f^{-1}. Určte definičný obor a obor hodnôt funkcií f aj f^{-1}. Do pripravenej súradnicovej sústavy načrtnite grafy oboch funkcií.



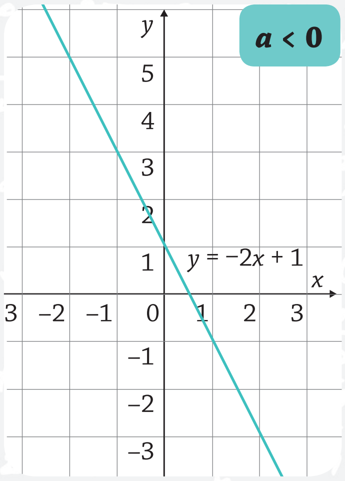


LINEÁRNE A KVADRATICKÉ FUNKCIE

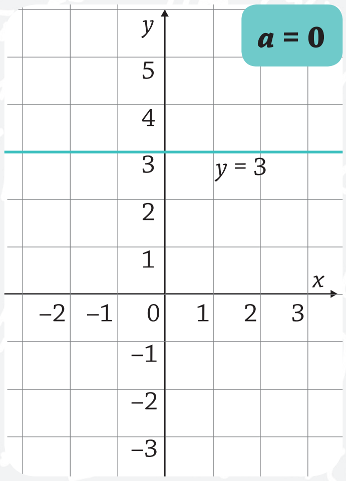
Lineárna funkcia je každá funkcia $f : y = ax + b$, kde $a, b \in R$.
Grafom lineárnej funkcie je **priamka**.



Funkcia je rastúca



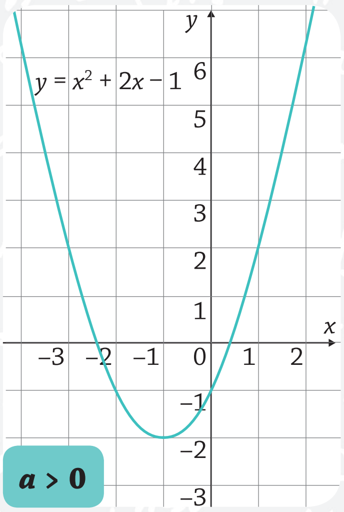
Funkcia je klesajúca



Funkcia je konštantná

Koeficient a určuje, ako prudko rastie (klesá) funkcia.
Priesečník funkcie s osou y má súradnice [0, b].

Kvadratická funkcia je každá funkcia $f : y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.
Grafom kvadratickej funkcie je **parabola**.



Funkcia má minimum

Súradnice vrcholu môžeme určiť úpravou rovnice na vrcholový tvar – urobíme ju pre funkciu na obrázku vpravo:

$f : y = -2x^2 + 4x + 3 =$

$= -2(x^2 - 2x) + 3 =$

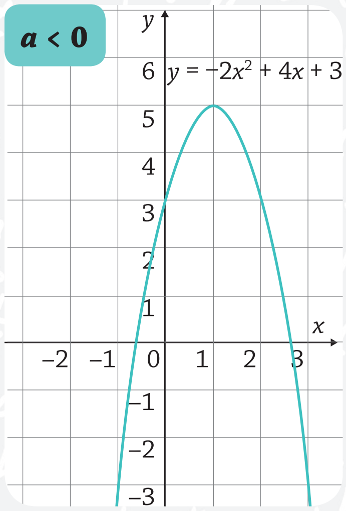
$= -2[(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) - 1^2] + 3 =$

$= -2(x-1)^2 + 2 + 3 =$

$= -2(x-1)^2 + 5 \qquad V = [1, 5]$

Všeobecne:

$$V = \left[-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right] = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$$

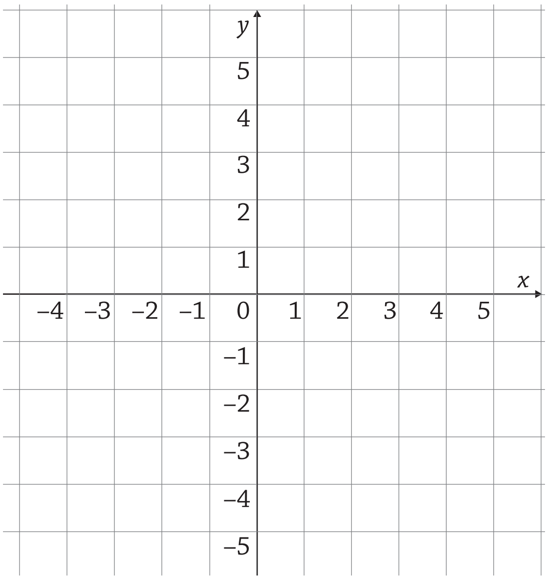


Funkcia má maximum

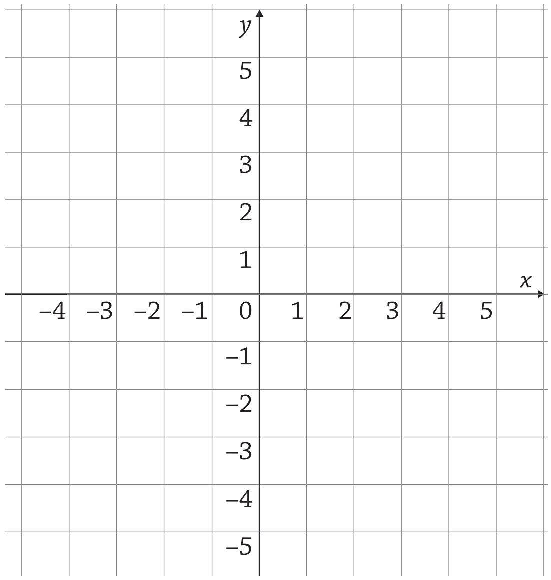
Lineárne funkcie

1. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy daných funkcií.

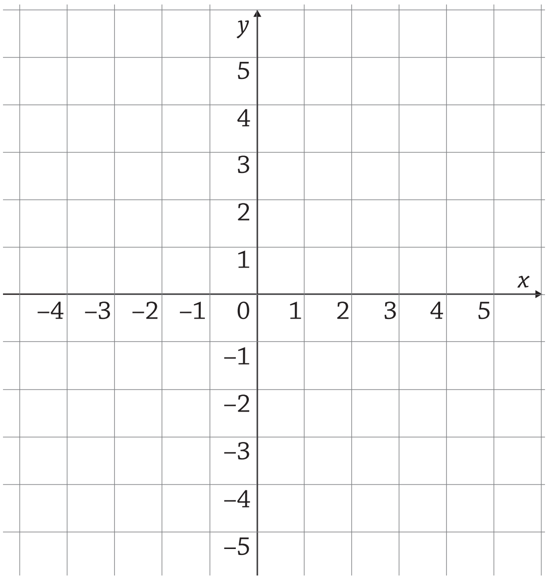
a) $f_1 : y = x,\ f_2 : y = 2x,\ f_3 : y = \frac{1}{2}x$



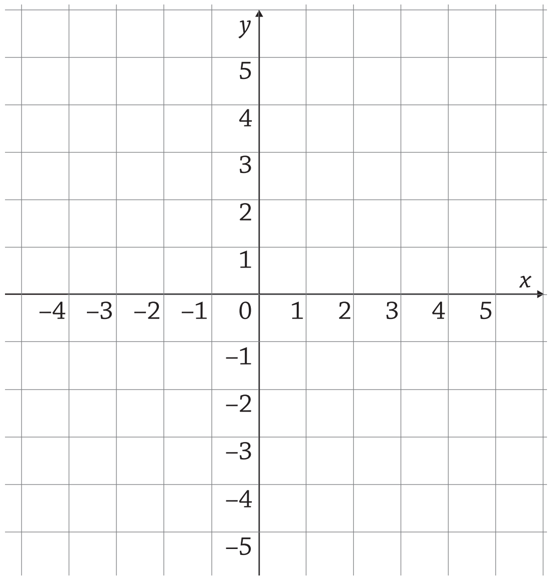
b) $g_1 : y = -x,\ g_2 : y = -2x,\ g_3 : y = -\frac{1}{2}x$



c) $h_1 : y = 2x,\ h_2 : y = 2x + 2,\ h_3 : y = 2x - 3$



d) $i_1 : y = x - 2,\ i_2 : y = -2x - 2,\ i_3 : y = 3x - 2$



2. Určte rovnicu lineárnej funkcie, ktorej graf prechádza bodmi $A[2, -2]$, $B[-1, 4]$.

3. Daná je funkcia $f : y = 2x - 3$. Načrtnite jej graf a z grafu určte všetky $x \in R$, pre ktoré platí:

a) $f(x) = 0$,

b) $f(x) \geq 1$,

c) $-1 \leq f(x) < 3$.

4. Auto má priemernú spotrebu 7 litrov benzínu na 100 km a má plnú nádrž s 35 litrami benzínu.

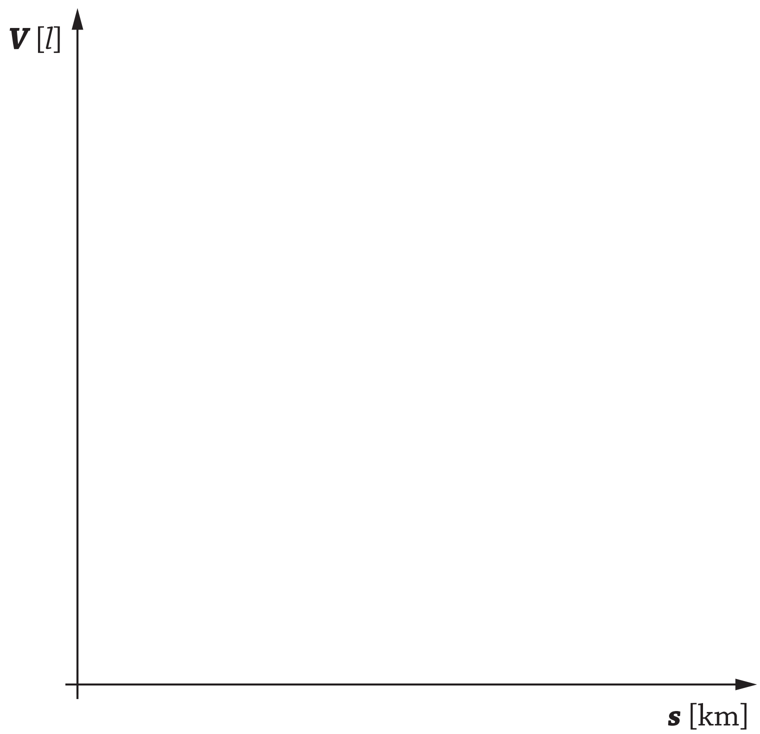
a) Doplňte tabuľku a zostrojte graf funkcie, ktorá vyjadruje závislosť množstva benzínu v nádrži od počtu prejdených kilometrov.

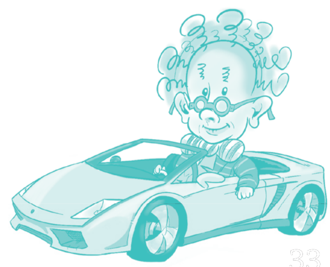
b) Vyjadrite túto funkciu rovnicou a určte jej definičný obor a obor hodnôt.

c) Koľko litrov benzínu ostane v nádrži po 135 km jazde?

d) Po koľkých kilometroch jazdy ostanú v nádrži 2 litre benzínu?

s [km]	0	100					
V [l]	35						





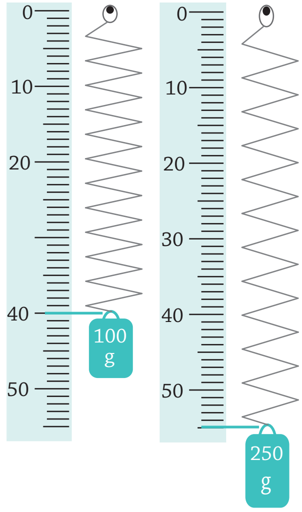
5. Pri pružnej deformácii je dĺžka pružiny priamo úmerná zaťaženiu pružiny. Keď bolo na pružine zavesené závažie s hmotnosťou 100 g, bola dĺžka pružiny 40 cm, pri zavesení 250 g závažia bola dĺžka pružiny 55 cm.

a) Vyjadrite rovnicou aj grafom funkciu, ktorá vyjadruje závislosť dĺžky pružiny od hmotnosti zaveseného závažia.

b) Zistite, aká by bola dĺžka pružiny po zavesení 200 g závažia.

c) Aká je hmotnosť závažia, ak dĺžka pružiny je 42 cm?

d) Aká dlhá je pružina, ak na nej nie je zavesené žiadne závažie?



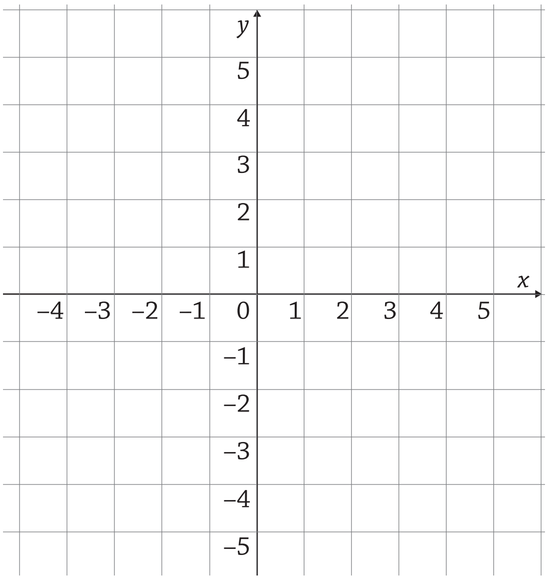
6. V obore reálnych čísel riešte graficky sústavy lineárnych rovníc.

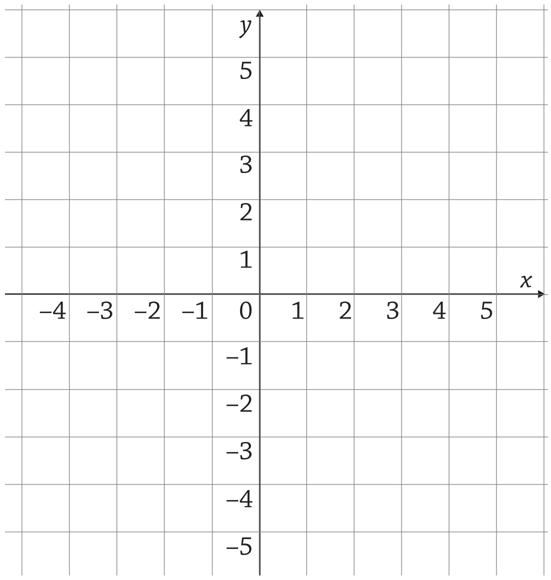
a) $y = x - 4$
$y = -2x - 1$

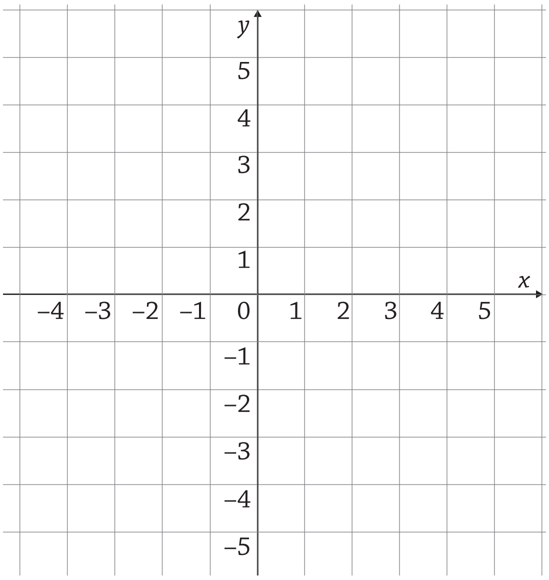
b) $y = 3x$
$3x - y - 2 = 0$

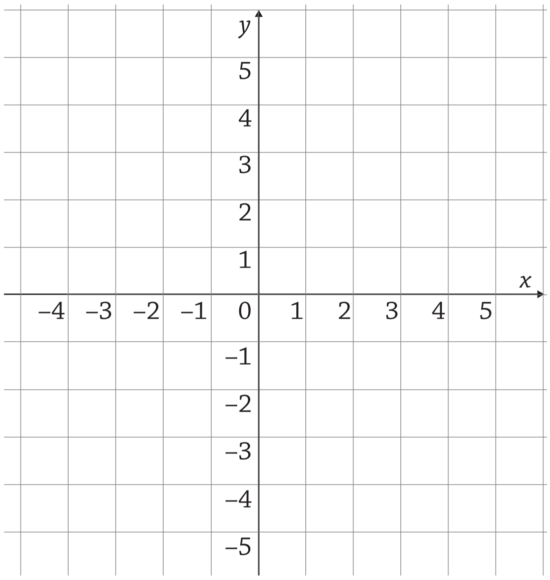
c) $2x + 5y = 1$
$3x - 2y = -8$

d) $x - 2y = 3$
$-2x + 4y = -6$



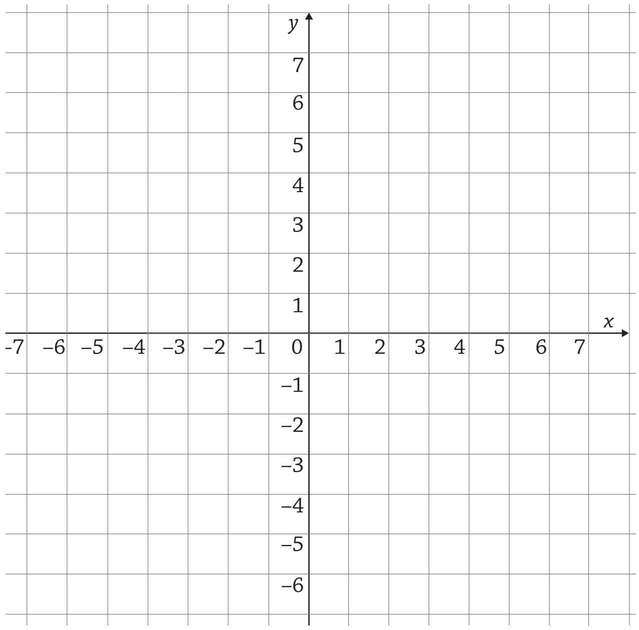






7. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy lineárnych funkcií s absolútnymi hodnotami.

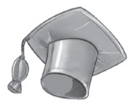
$f: y = |x|$, $g: y = |x| - 3$, $h: y = |x - 2|$

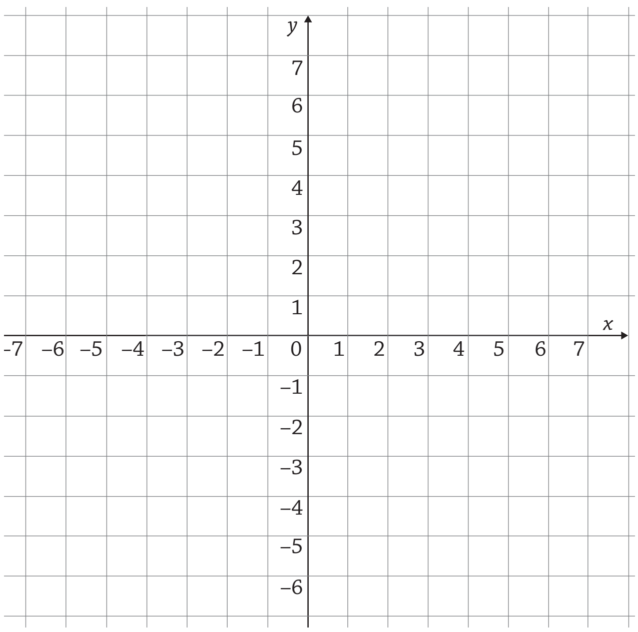


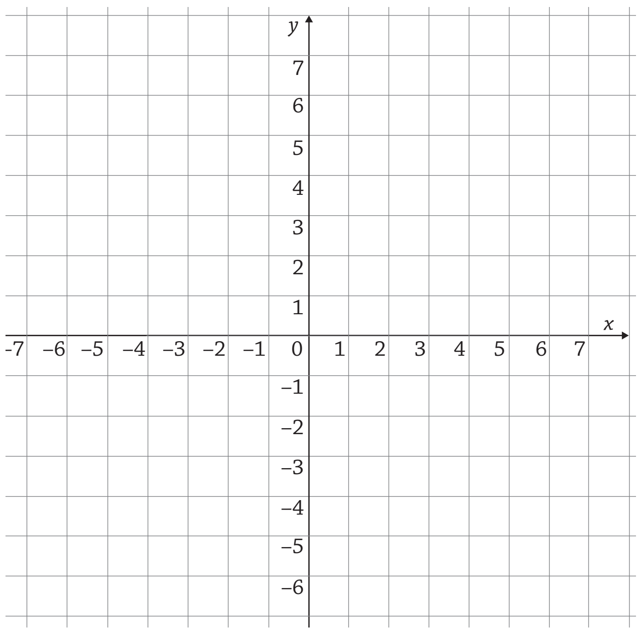
8. Načrtnite grafy lineárnych funkcií s absolútnymi hodnotami.

a) $f: y = |2x + 3|$

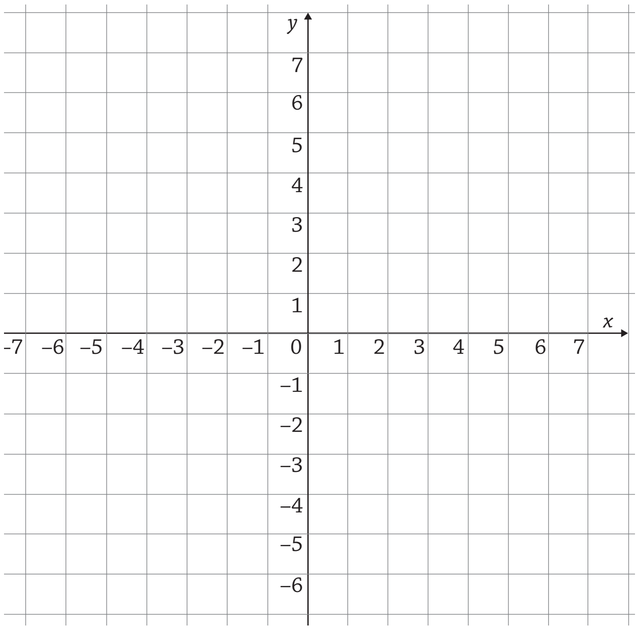
b) $g: y = |1 - x| + |x - 3|$







c) $h: y = |2 + x| - \frac{1}{2}|x + 4|$



d*) Z grafu funkcie h určte, koľko riešení v obore reálnych čísel má rovnica $|2 + x| - \frac{1}{2}|x + 4| = m$ pre rôzne hodnoty parametra $m \in R$.

Kvadratické funkcie

1. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy daných funkcií. Sledujte, ako hodnoty koeficientov v predpise funkcie ovplyvňujú tvar paraboly a jej polohu v súradnicovej sústave.

a) $f_1: y = x^2$, $f_2: y = 2x^2$, $f_3: y = \frac{1}{4}x^2$

b) $g_1: y = -x^2$, $g_2: y = -3x^2$, $g_3: y = -\frac{1}{2}x^2$

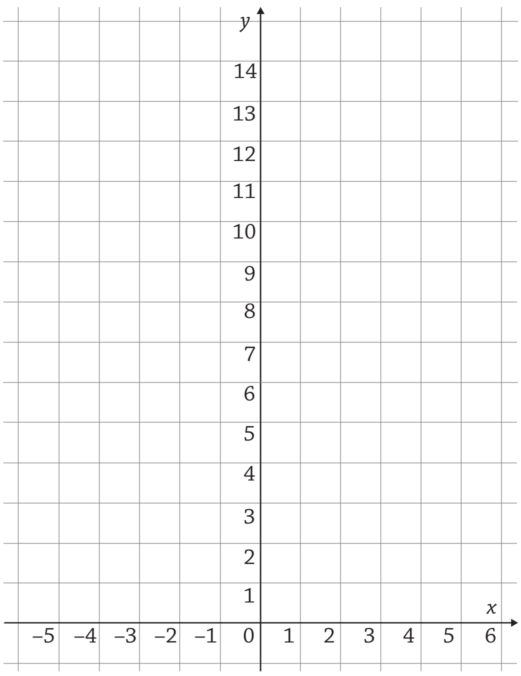
a)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$											
$f_2(x)$											
$f_3(x)$											

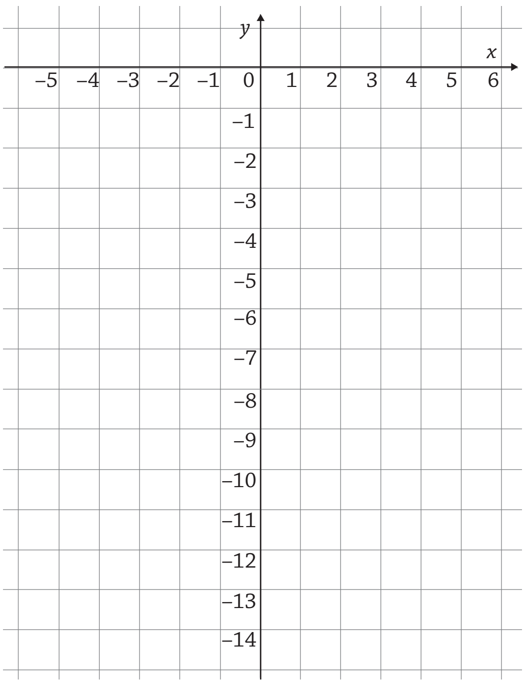
b)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$											
$g_2(x)$											
$g_3(x)$											

a)



b)



c) $h_1 : y = x^2$, $h_2 : y = x^2 + 2$, $h_3 : y = x^2 - 3$

d) $i_1 : y = x^2$, $i_2 : y = (x + 1)^2$, $i_3 : y = (x - 2)^2$

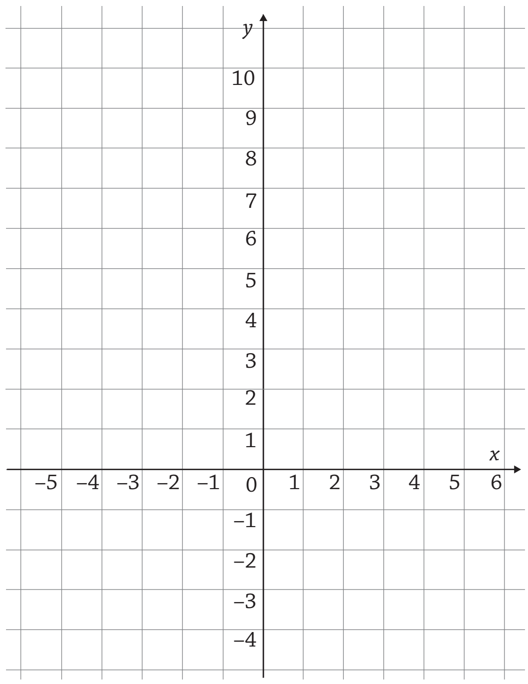
c)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$h_1(x)$											
$h_2(x)$											
$h_3(x)$											

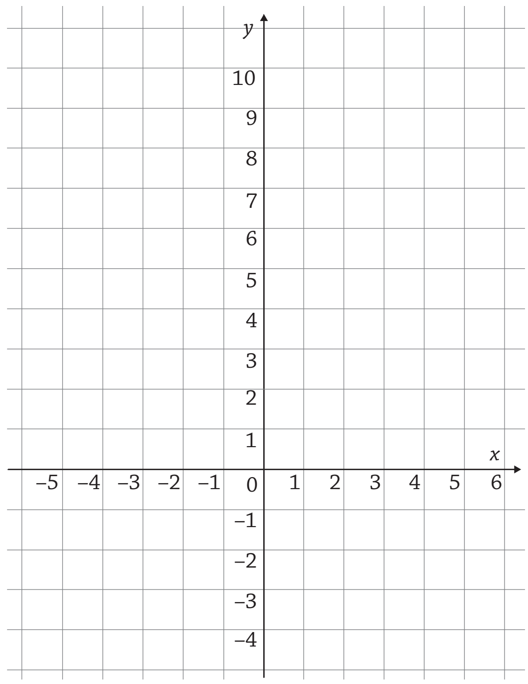
d)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$i_1(x)$											
$i_2(x)$											
$i_3(x)$											

c)



d)



e) $j_1 : y = x^2$, $j_2 : y = (x+2)^2$, $j_3 : y = (x+2)^2 - 4$

f) $k_1 : y = x^2$, $k_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$, $k_3 : y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$, $k_4 : y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

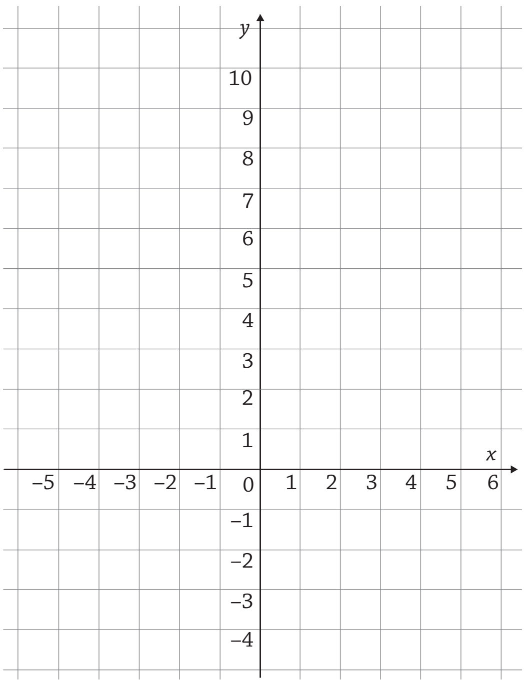
e)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	6
$j_1(x)$											
$j_2(x)$											
$j_3(x)$											

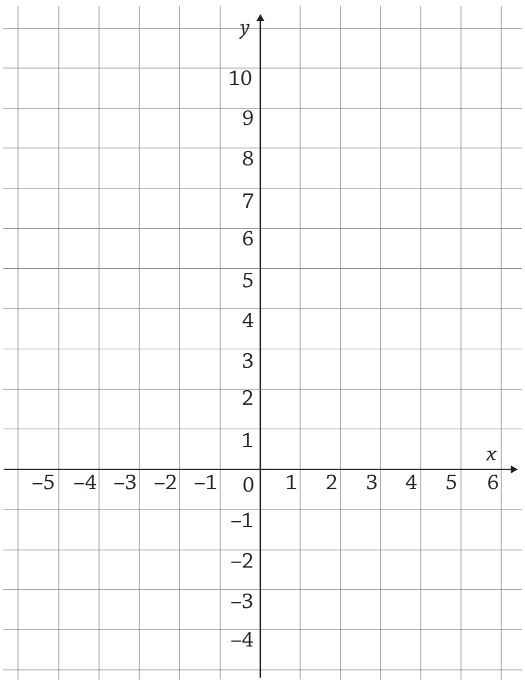
f)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	6
$k_1(x)$											
$k_2(x)$											
$k_3(x)$											
$k_4(x)$											

e)



f)



2. Kvadratická funkcia je daná vo vrcholovom tvare. Určte súradnice vrcholu paraboly a predpis funkcie upravte na všeobecný tvar.

a) $y = (x + 2)^2 - 4$

b) $y = -2(x - 3)^2 + 2$

c) $y = 3(x + 1)^2 - 3$

d) $y = -(x - 4)^2 + 1$

3. Upravte kvadratickú funkciu danú vo všeobecnom tvare na vrcholový tvar. Z vrcholového tvaru určte súradnice vrcholu paraboly.

a) $y = x^2 - 6x + 7 = (x^2 - 2x \bigcirc + \bigcirc^2) - \bigcirc^2 + 7 = (x - \bigcirc)^2 \pm \square$

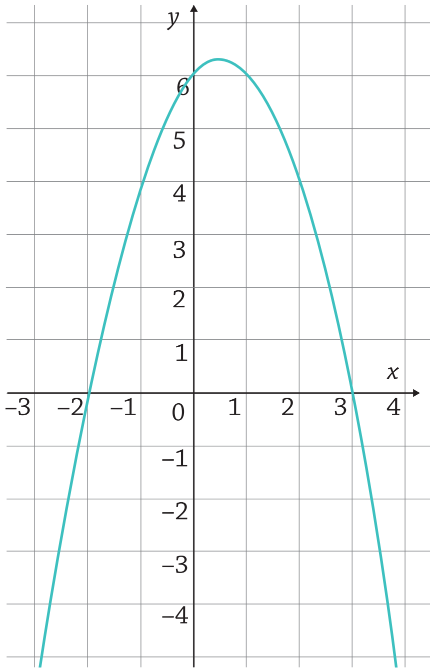
b) $y = 2x^2 + 4x - 1 = ⬡(x^2 + 2x) - 1 = ⬡[(x^2 + 2 \cdot x \cdot \bigcirc + \bigcirc^2) - \bigcirc^2] - 1 =$
$= ⬡(x + \bigcirc)^2 - ⬡ \cdot \bigcirc^2 - 1 = ⬡(x + \bigcirc)^2 \pm \square$

c) $y = x^2 + 3x + 4 =$

d) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 =$

e) $y = -3x^2 + 4x - 1 =$

4. Kvadratická funkcia je určená grafom na obrázku.



a) Z grafu určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí $f(x) = 4$.

b) Z grafu určte súradnice priesečníkov s osami súradnicovej sústavy.

c) Vypočítajte súradnice vrcholu paraboly.

d) Určte predpis funkcie vo vrcholovom aj všeobecnom tvare.

5. Kvadratická funkcia je daná v súčinovom tvare $f : y = (x + 4)(x - 2)$. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré funkcia nadobúda nulové hodnoty. Načrtnite jej graf a z grafu určte všetky reálne čísla x, pre ktoré funkcia f nadobúda kladné hodnoty.

6. Daná je funkcia $f : y = x^2 - 4x$. Načrtnite jej graf a určte všetky reálne čísla x, pre ktoré funkcia f nadobúda záporné hodnoty.

7. V obore reálnych čísel riešte graficky kvadratické rovnice a nerovnice. Využite graf kvadratickej funkcie.

a) $x^2 + x - 6 = 0$

b) $-2(x - 3)(x + 1) \geq 0$

c) $x^2 + 2x < 0$

d) $x^2 - 7x + 12 > 0$

e) $x^2 + 6x + 10 \leq 0$

f) $-x^2 + 4x - 4 < 0$

8. Napíšte všeobecný tvar kvadratickej funkcie, pre ktorú platí:

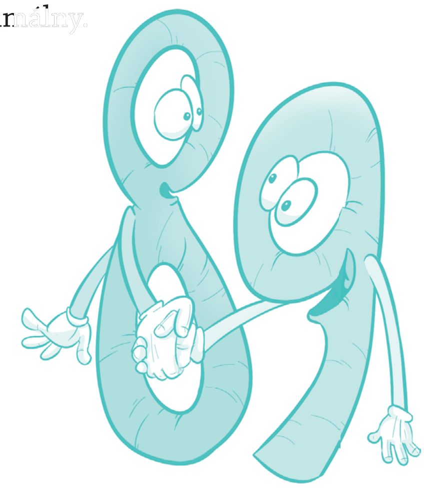
a) $f(0) = -3$, $f(-1) = -6$, $f(2) = 15$

b) $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(0) = 6$

9. Načrtnite graf a určte predpis kvadratickej funkcie, ktorá je párna, hodnota jej minima je -3 a prechádza bodom $A[2, 5]$.

10. Obvod pravouholníka (obdĺžnik alebo štvorec) je 24 cm. Pri akých rozmeroch bude jeho obsah najväčší?

11. Číslo 8 rozložte na dva sčítance tak, aby súčet ich druhých mocnín bol minimálny.

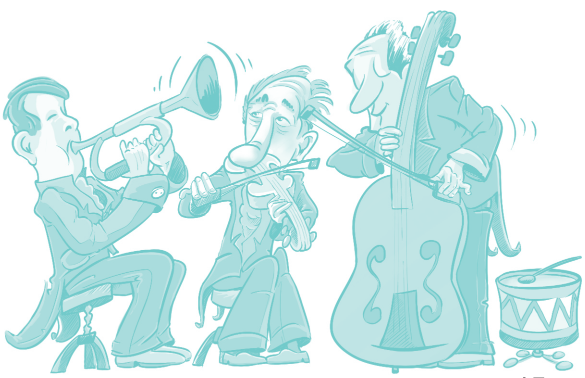


12. Agentúra, ktorá organizuje koncerty pre školy, ponúka takéto podmienky: Koncert organizuje pre najmenej 150 a najviac 300 žiakov. Pri počte 150 žiakov je cena vstupenky 3,50 €. Pri počte vyššom ako 150 žiakov sa cena každej vstupenky znižuje o 1 cent za každého žiaka prevyšujúceho počet 150.

a) Nájdite funkciu vyjadrujúcu závislosť sumy, ktorú zaplatí škola za všetky vstupenky, od počtu žiakov na koncerte. Načrtnite aj graf tejto funkcie.

b) Zistite, pri akom počte žiakov vyberie agentúra za vstupenky najvyššiu sumu a aká je táto suma. Aká je pri tomto počte žiakov cena jednej vstupenky?

c) Aká môže byť najnižšia cena jednej vstupenky a koľko vtedy dostane agentúra?



13. Načrtnite graf funkcie a opíšte jej vlastnosti.

a) $f : y = |x^2 + 4x + 3|$

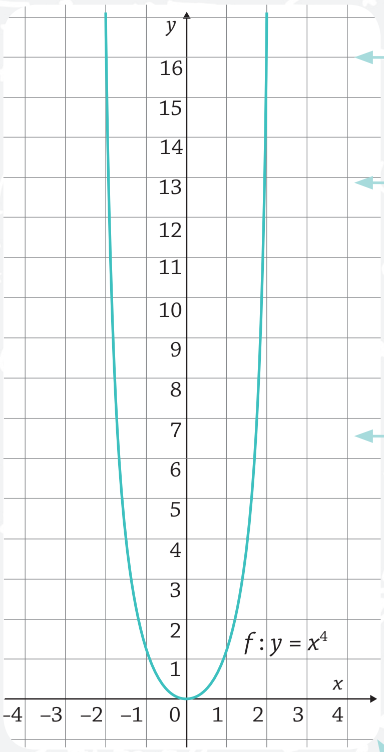
b) $g : y = |-2x^2 + 6x|$

c) $h : y = x^2 - 4|x + 1|$

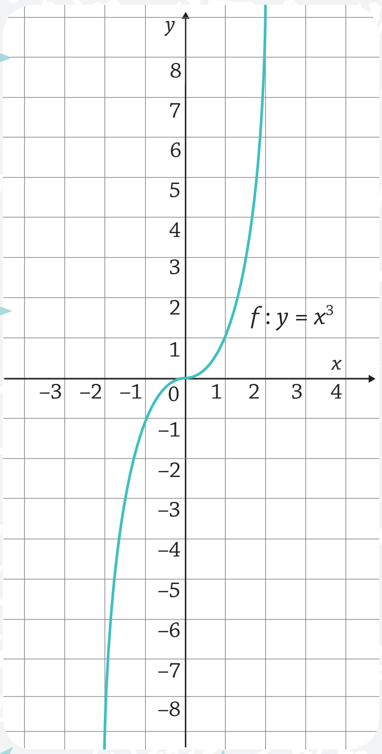
MOCNINOVÉ FUNKCIE

Mocninová funkcia je každá funkcia $f : y = x^n$, kde $n \in Z - \{0\}$.
Graf a vlastnosti mocninovej funkcie závisia od znamienka a parity čísla n.

$n \in N$, n je párne



$n \in N - \{0\}$, n je nepárne



$D(f) = R$

$H(f) = \langle 0, \infty)$

$H(f) = R$

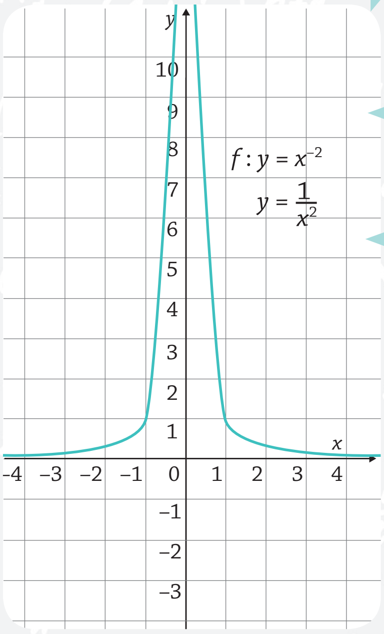
f má minimum

f je **párna**
f je zdola ohraničená
$[-1, 1] \in f$

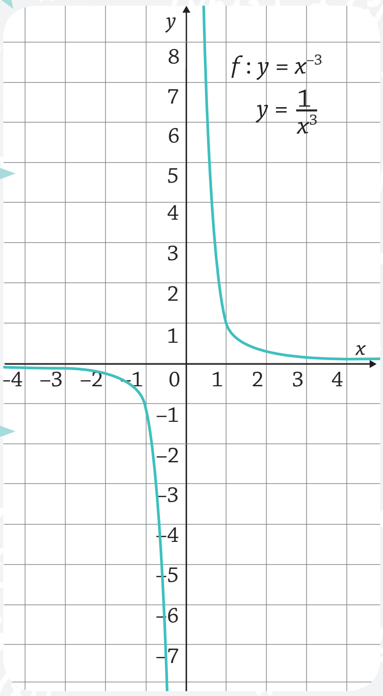
$[1, 1] \in f$

f je **nepárna**
f je prostá
$[-1, -1] \in f$

$n \in Z^-$, n je párne



$n \in Z^-$, n je nepárne



$D(f) = R - \{0\}$

$H(f) = (0, \infty)$

$H(f) = R - \{0\}$

Mocninové funkcie s prirodzeným exponentom

1. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií.

a) $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = x^4$, $f_3 : y = x^6$, f_1 je kvadratická funkcia

b) $g_1 : y = x^1$, $g_2 : y = x^3$, $g_3 : y = x^5$, g_1 je lineárna funkcia

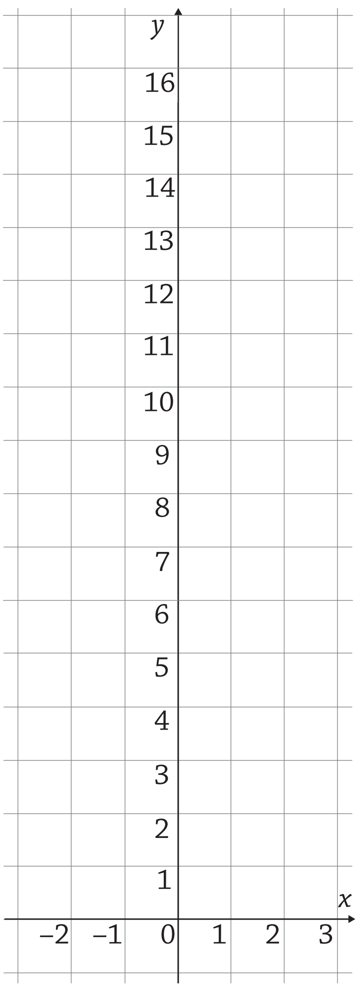
a)

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f_1(x)$									
$f_2(x)$									
$f_3(x)$									

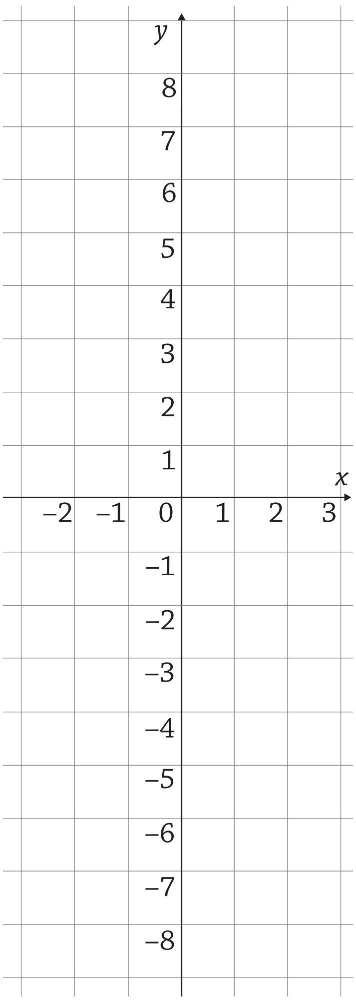
b)

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$g_1(x)$									
$g_2(x)$									
$g_3(x)$									

a)



b)



2. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií. Určte aj definičný obor a obor hodnôt všetkých funkcií.

a) $f_1 : y = x^4$, $f_2 : y = (x + 1)^4$, $f_3 : y = (x + 1)^4 - 1$, $f_4 : y = |(x + 1)^4 - 1|$

b) $g_1 : y = x^3$, $g_2 : y = (x - 2)^3$, $g_3 : y = (x - 2)^3 + 1$, $g_4 : y = |(x - 2)^3 + 1|$

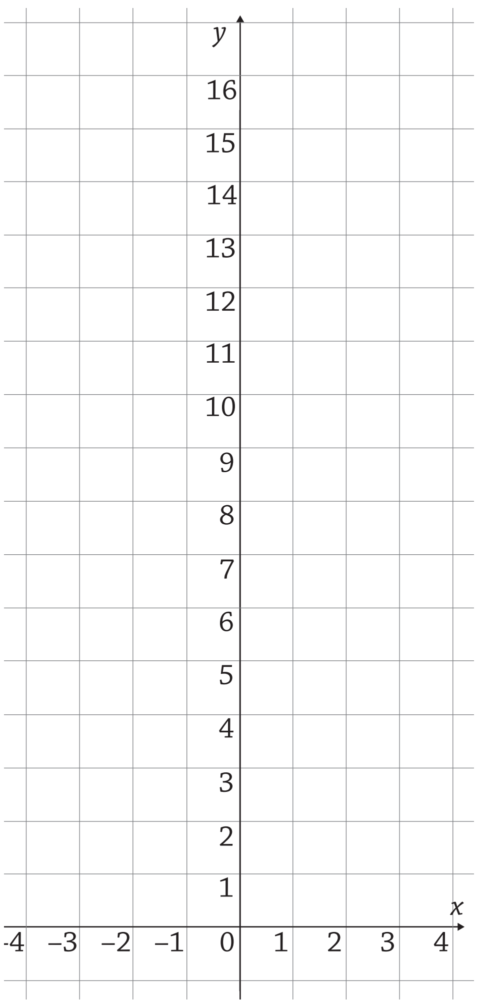
a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f_1(x)$							
$f_2(x)$							
$f_3(x)$							
$f_4(x)$							

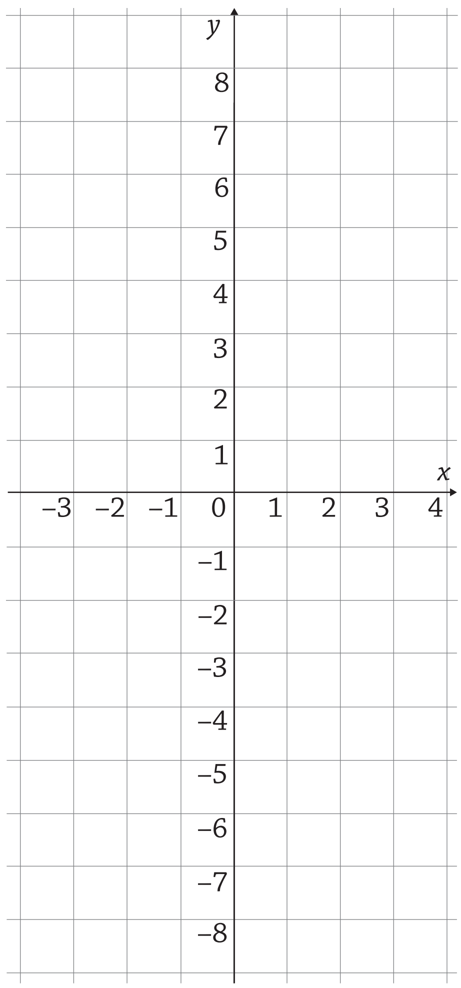
b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g_1(x)$							
$g_2(x)$							
$g_3(x)$							
$g_4(x)$							

a)



b)



Mocninové funkcie so záporným celočíselným exponentom

1. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií.

a) $f_1 : y = x^{-2}$, $f_2 : y = x^{-4}$ b) $g_1 : y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $g_2 : y = \frac{2}{x}$, $g_3 : y = \frac{-4}{x}$

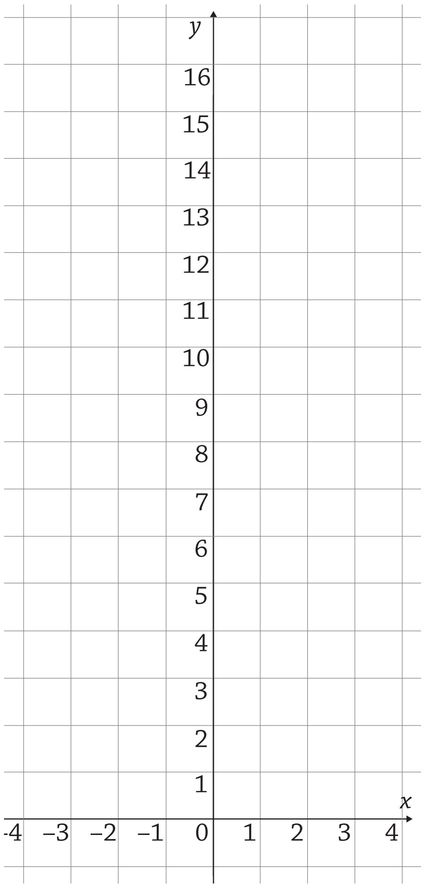
a)

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f_1(x)$									
$f_2(x)$									

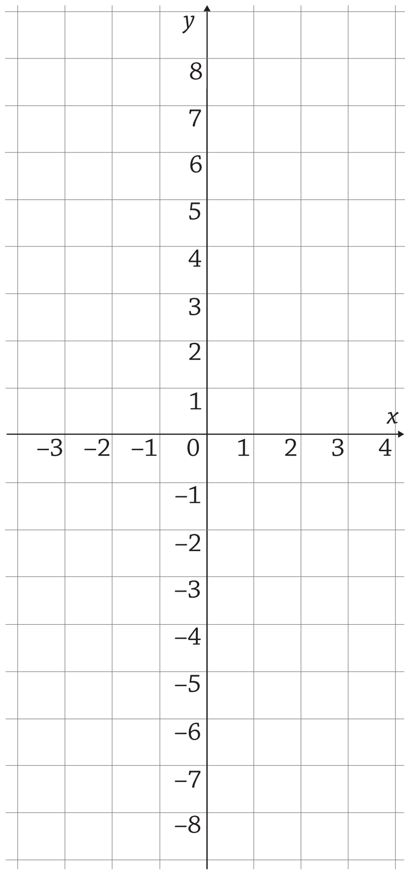
b)

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$g_1(x)$									
$g_2(x)$									
$g_3(x)$									

a)



b)



2. Funkcie g_1, g_2, g_3 sú mocninové funkcie s exponentom −1, ale používa sa pre ne aj iný názov – je to nepriama úmernosť. Všeobecne: Každá funkcia $n : y = \frac{k}{x}$, kde $k \in R - \{0\}$, sa nazýva **nepriama úmernosť**. Grafom nepriamej úmernosti je hyperbola.

Ktorú funkciu nazývame priama úmernosť? Doplňte jej definíciu.

Každá funkcia $p : y =$ ______ , kde $k \in R - \{0\}$, sa nazýva **priama úmernosť**. Jej grafom je __________.

3. Rozhodnite, ktorá závislosť je priama a ktorá nepriama úmernosť:

a) závislosť počtu vyrobených súčiastok za zmenu od počtu robotníkov,
b) závislosť času jazdy auta na rovnakej trase od priemernej rýchlosti,
c) závislosť spotreby benzínu od prejdenej vzdialenosti,
d) závislosť času potrebného na vykonanie rovnakej práce od počtu pracovníkov,
e) závislosť šírky obdĺžnika od jeho dĺžky pri nemeniacom sa obsahu,
f) závislosť obsahu trojuholníka od veľkosti výšky na stranu, ktorej veľkosť sa nemení,
g) závislosť tlaku plynu od objemu pri nezmenenej teplote (izotermický dej).

PÚ	NÚ

Vyberte si jednu priamu a jednu nepriamu úmernosť a načrtnite jej graf.

4. Mišo mal natrieť plot okolo záhrady. Keďže to už robil minulý rok, vedel, že by mu to trvalo 10 hodín. Mišo mal 4 dobrých kamarátov, s ktorými chcel ísť ešte v ten istý deň na kúpalisko, a tí sa rozhodli, že mu pomôžu. Všetci jeho kamaráti boli pri natieraní plota rovnako zruční ako Mišo. Vyjadrite tabuľkou, rovnicou aj grafom závislosť času potrebného na natretie plota od počtu chlapcov, ktorí ho natierali.

Uvažujte o reálnej situácii, ktorú vyjadruje graf, a rozhodnite, či grafom je spojitá krivka alebo len niekoľko izolovaných bodov. Čo myslíte, oplatilo by sa Mišovi zavolať na pomoc pri maľovaní aj viac kamarátov? Ako dlho by maľovanie plota trvalo 10, 20, 100 chlapcom? Predstavte si aj reálne, napríklad koľko štetcov by potrebovali, či by si pri práci nezavadzali a pod., a zvážte, koľko chlapcov najviac by ešte pri maľovaní naozaj pomáhalo.

5. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií a určte ich rovnice. Určte aj definičný obor a obor hodnôt všetkých funkcií. Pred načrtnutím kriviek grafov načrtnite najprv asymptoty – priamky, ku ktorým sa graf funkcie približuje, ale nikdy ich nepretne.

a) $f_1 : y = x^{-2}$; f_2, ktorej graf je oproti grafu funkcie f_1 posunutý o 3 jednotky doprava; f_3, ktorej graf je oproti grafu funkcie f_2 posunutý o 2 jednotky dole; $f_4 : y = |f_3(x)|$

b) $g_1 : y = x^{-3}$; g_2, ktorej graf je oproti grafu funkcie g_1 posunutý o 1 jednotku doľava; g_3, ktorej graf je oproti grafu funkcie g_2 posunutý o 3 jednotky hore

6. Určte definičný obor a obor hodnôt funkcie $f: y = \dfrac{1}{x+4} + 3$ a načrtnite jej graf. Uvažujte, akými posunmi by sme graf funkcie f dostali z grafu funkcie $f_1 : y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Pred načrtávaním grafu nezabudnite na asymptoty.

Upravte predpis funkcie f tak, že sčítate dva jej členy (úpravou na spoločného menovateľa) a získate jeden zlomok. Zdôvodnite, prečo takúto funkciu môžeme nazvať aj **lineárne lomená funkcia**.

Vyšlo vám $f: y = \dfrac{3x+13}{x+4}$?

Vedeli by ste predpis funkcie $f: y = \dfrac{3x+13}{x+4}$ upraviť na tvar $f: y = \dfrac{1}{x+4} + 3$? (Spomeňte si na delenie mnohočlenov.) Ktorý tvar predpisu funkcie je vhodnejší na načrtnutie jej grafu?

7. Určte definičný obor a obor hodnôt funkcie $g : y = \dfrac{-2x + 3}{x - 2}$ a načrtnite jej graf. Pred načrtnutím grafu nezabudnite načrtnúť asymptoty. Opíšte aj všetky vlastnosti funkcie.

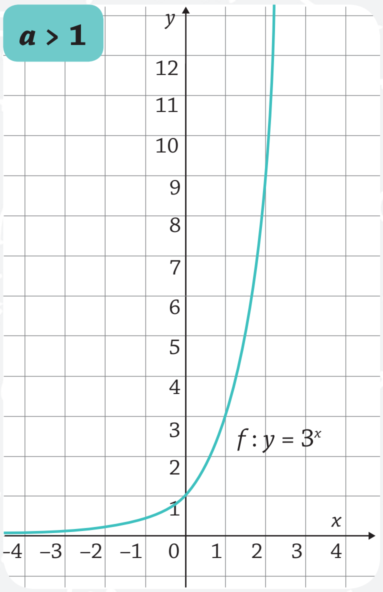
8. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite graf danej funkcie a k nej inverznej funkcie.

a) $f : y = x^2,\ x \in \langle 0, \infty)$

b) $g : y = x^3$

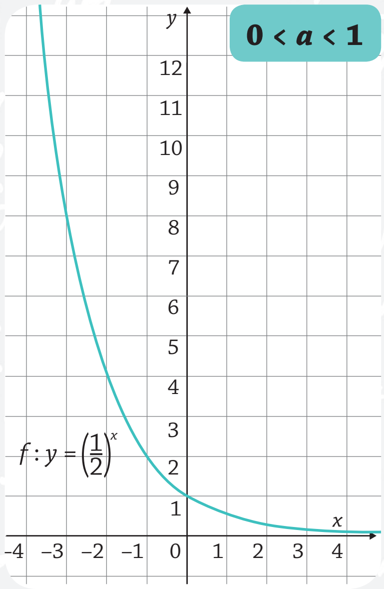
EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE

Exponenciálna funkcia je každá funkcia $f: y = a^x$, kde $a \in R^+ - \{1\}$.
Grafom exponenciálnej funkcie je **exponenciálna krivka**.



Vlastnosti funkcie *f*:
$D(f) = R$, $H(f) = (0, \infty)$
$[0, 1] \in f$, $[1, a] \in f$

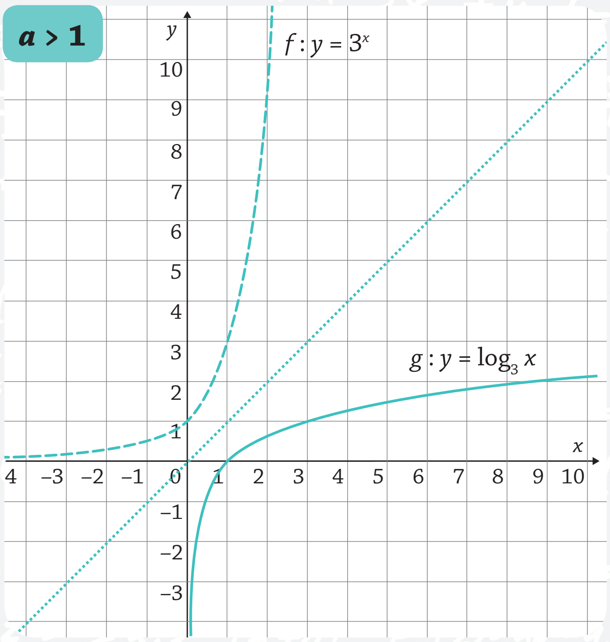
je prostá
je zdola ohraničená
nie je zhora ohraničená
nemá maximum ani minimum
nie je párna ani nepárna
nie je periodická

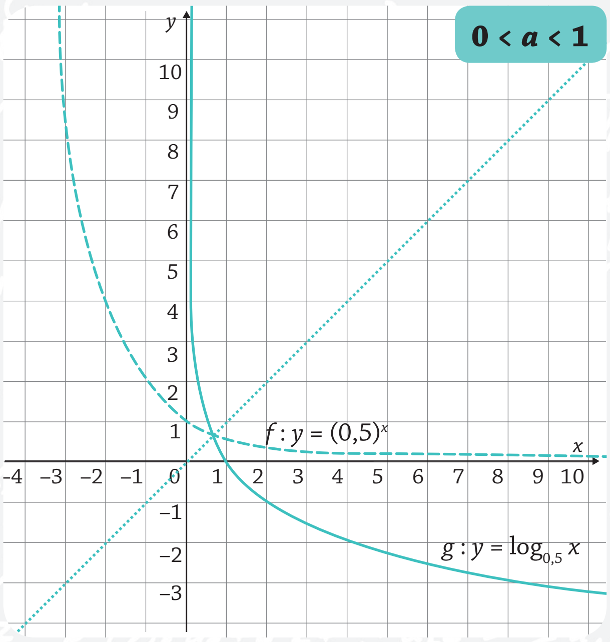


Funkcia je rastúca

Funkcia je klesajúca

Každá inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii $f: y = a^x$ sa nazýva **logaritmická funkcia**.
Zapisujeme $f^{-1} = g: y = \log_a x$, kde $a \in R^+ - \{1\}$.
Grafom logaritmickej funkcie g je **logaritmická krivka**.





$D(g) = (0, \infty)$, $H(g) = R$, $[1, 0] \in g$, $[a, 1] \in g$, g nie je ohraničená zdola ani zhora.
Ostatné vlastnosti funkcie g sú rovnaké ako pri exponenciálnej funkcii f.

Určiť funkčnú hodnotu logaritmickej funkcie $y = \log_a x$ v bode $r \in R^+$, t. j. určiť logaritmus čísla r so základom $a \in R^+ - \{1\}$, znamená nájsť také číslo s, ktorým musíme umocniť základ a, aby sme dostali číslo r:

$\forall r \in R^+, \forall a \in R^+ - \{1\}$:

$\log_a r = s \Leftrightarrow a^s = r$

$a = 10 \Rightarrow \log_{10} r = \log r$ ... dekadický logaritmus

$a = e \Rightarrow \log_e r = \ln r$ ... prirodzený logaritmus

Pri počítaní s logaritmami používame vety o logaritmoch:

$\forall a, b \in R^+ - \{1\}, \forall r, s \in R^+, \forall n \in R$:

a) $\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$

b) $\log_a \left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$

c) $\log_a r^n = n \cdot \log_a r$

d) $\log_a s = \dfrac{\log_b s}{\log_b a}$

Exponenciálna rovnica je rovnica, v ktorej neznáma je v exponente mocniny.

Logaritmická rovnica je rovnica, v ktorej neznáma je v argumente logaritmickej funkcie.

V R riešte rovnicu:

$4 \cdot 2^{2x+1} = 8^x$

$2^2 \cdot 2^{2x+1} = (2^3)^x$

$2^{2+2x+1} = 2^{3x}$

$2^{2x+3} = 2^{3x}$

$\Downarrow$ exponenciálna funkcia je prostá

$2x + 3 = 3x$

$x = 3 \quad K = \{3\}$

V R riešte rovnicu:

$5^x = 7$

$\log (5^x) = \log 7$

$x \cdot \log 5 = \log 7$

$x = \dfrac{\log 7}{\log 5} \cong 1{,}21$

$x = \left\{\dfrac{\log 7}{\log 5}\right\} = \{\log_5 7\}$

V R riešte rovnicu:

$9^x - 3^x = 6$

$(3^2)^x - 3^x = 6$

$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$

Substitúcia: $3^x = m$

$m^2 - m - 6 = 0$

$(m - 3)(m + 2) = 0$

$m = 3 \lor m = -2$

Návrat k substitúcii:

$3^x = 3 \qquad 3^x = -2$

$3^x = 3^1 \qquad -2 \notin H(f)$

$x = 1$

$K = \{1\}$

V R riešte rovnicu:

$\log_3 (x - 2) - \log_3 x = \log_3 2$

$\log_3 \dfrac{x-2}{x} = \log_3 2$

$\Downarrow$ logaritmická funkcia je prostá

$\dfrac{x-2}{x} = 2$

$x - 2 = 2x$

$x = -2$

Podmienky:

$x > 2, x > 0$

Rovnica nemá riešenie.

$K = \emptyset$

V R riešte nerovnicu:

$\log_{0,5} (x + 1) < \log_{0,5} (16 - 2x)$

$\Downarrow$ funkcia je klesajúca ($a < 1$)

$x + 1 > 16 - 2x$

$3x > 15$

$x > 5$

Podmienky:

$x > -1 \land x < 8$

$K = (5, \infty) \cap (-1, 8) = (5, 8)$

Exponenciálne funkcie

1. Ktoré z nasledujúcich funkcií sú exponenciálne? Zakrúžkujte ich rovnice.

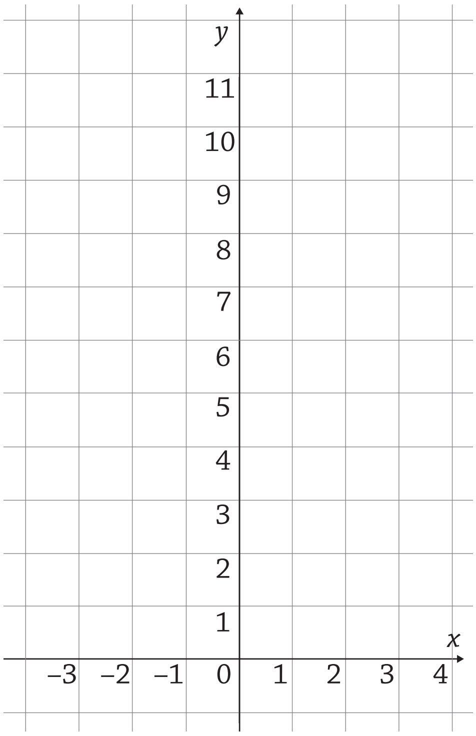
$f : y = x^4$, $g : y = 4^x$, $h : y = 0{,}7^x$, $i : y = x^{-2}$, $j : y = 10^x$, $k : y = x^2$, $l : y = \dfrac{1}{x^3}$

2. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií.

a) $f_1 : y = 2^x$ $\quad f_2 : y = 3^x$
$f_3 : y = 10^x$ $\quad f_4 : y = e^x$

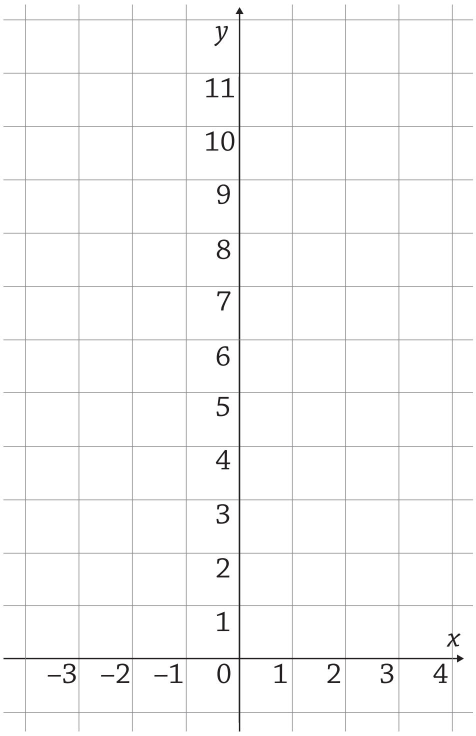
$e \cong 2{,}71828 \notin Q$
e – Eulerovo číslo
f_4 – prirodzená exponenciálna funkcia
f_3 – dekadická exponenciálna funkcia

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f_1(x)$							
$f_2(x)$							
$f_3(x)$							
$f_4(x)$							



b) $g_1 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad g_2 : y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
$g_3 : y = 0{,}7^x$ $\quad g_4 : y = 0{,}1^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g_1(x)$							
$g_2(x)$							
$g_3(x)$							
$g_4(x)$							



3. Využite grafy a vlastnosti exponenciálnych funkcií a bez použitia kalkulačky usporiadajte dané čísla od najmenšieho po najväčšie.

a) $(2{,}7)^3$, $(2{,}7)^{0{,}2}$, $(2{,}7)^{-1}$, $(2{,}7)^{-0{,}4}$

b) $(0{,}9)^{0{,}6}$, $(0{,}9)^{3{,}5}$, $(0{,}9)^{-4}$, $(0{,}9)^{-0{,}71}$

c) $(3{,}1)^{4{,}6}$, $(0{,}45)^0$, $(0{,}2)^3$, $(0{,}7)^3$, $(0{,}1)^{-4}$

4. Známa legenda hovorí, že keď vynálezca šachu predviedol hru panovníkovi, ten ňou bol skutočne nadšený a chcel ho štedro odmeniť. Vynálezca si žiadal za prvé políčko šachovnice 1 zrnko pšenice, za druhé 2 zrnká, za tretie 4 zrnká, za štvrté 8 zrniek... t. j. za každé ďalšie políčko vždy dvojnásobný počet zŕn ako za predchádzajúce. Panovník sa urazil, že žiada takú malú odmenu, a s hnevom prikázal, aby mu ju hneď vyplatili.
Najprv odhadnite a potom vypočítajte, koľko zrniek pšenice mal vynálezca dostať len za posledné, 64. políčko šachovnice.

Prekvapil vás tento výsledok? Bol váš odhad oveľa nižší?
Prekvapivo vysoký výsledok súvisí s prudkým rastom exponenciálnej funkcie. Všimnite si, že funkcia $y = 2^x$ pre $x > 0$ prudko rastie: $2^4 = 16$, $2^{10} = 1\,024$, $2^{15} = 32\,768$...
Naopak, všetky hodnoty funkcie *f* pre $x < 0$ sú z intervalu $(0, 1)$: $2^{-0{,}5} = 0{,}707$; $2^{-1} = 0{,}5$; $2^{-5} = 0{,}031$; $2^{-10} = 0{,}000976$...

Súčet zrniek za všetky políčka šachovnice je ešte oveľa väčší. Ukázalo sa, že v celej krajine niet toľko zŕn pšenice – ich počet je vyjadrený 20-ciferným číslom a predstavuje niekoľkotisícročnú celosvetovú úrodu. Dĺžka ťavej karavány s takýmto nákladom by bola 11,5 miliardy kilometrov, čo je 50-násobok vzdialenosti Slnko – Mars.

5. Poisťovňa pri výpočte škôd predpokladá, že hodnota auta klesne každý rok o 18 % minuloročnej hodnoty (tzv. amortizácia). Určte funkciu, ktorá vyjadruje hodnotu auta po *r* rokoch, ak jeho pôvodná cena bola 9 900 €. Aká bude hodnota auta pre potreby poisťovne po 7 rokoch?

6. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií.

a) $f_1 : y = 2^x$, $f_2 : y = 2^{x+1}$, $f_3 : y = 2^{x-2}$

b) $g_1 : y = 2^x$, $g_2 : y = 2 \cdot (2)^x$, $g_3 : y = 0{,}25 \cdot (2)^x$

c) $h_1 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h_2 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, $h_3 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f_1(x)$									
$f_2(x)$									
$f_3(x)$									

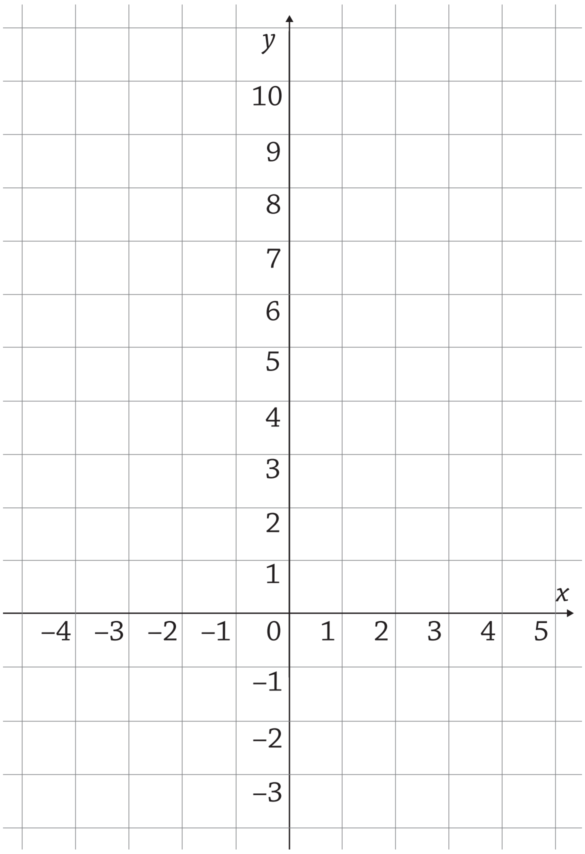
b)

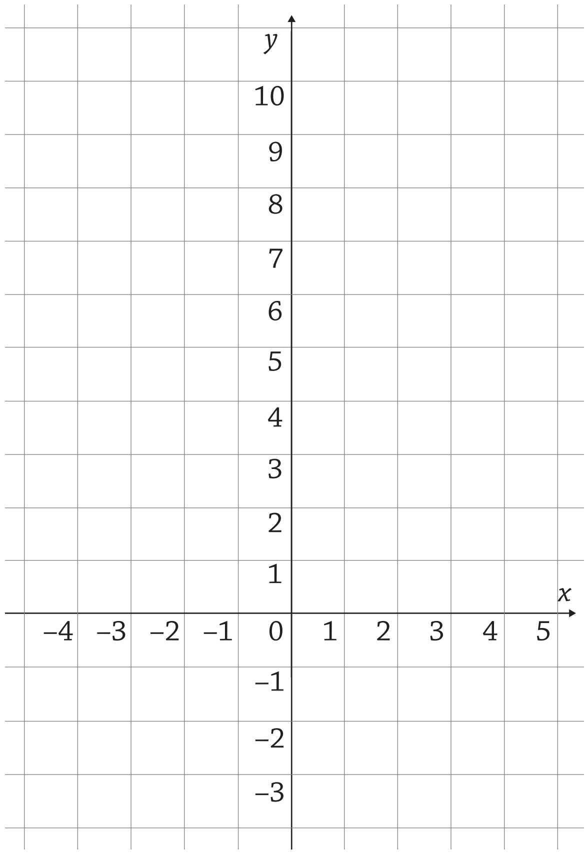
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$g_1(x)$									
$g_2(x)$									
$g_3(x)$									

c)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$h_1(x)$									
$h_2(x)$									
$h_3(x)$									

Zdôvodnite, prečo vystačíme s dvoma pripravenými súradnicovými sústavami.

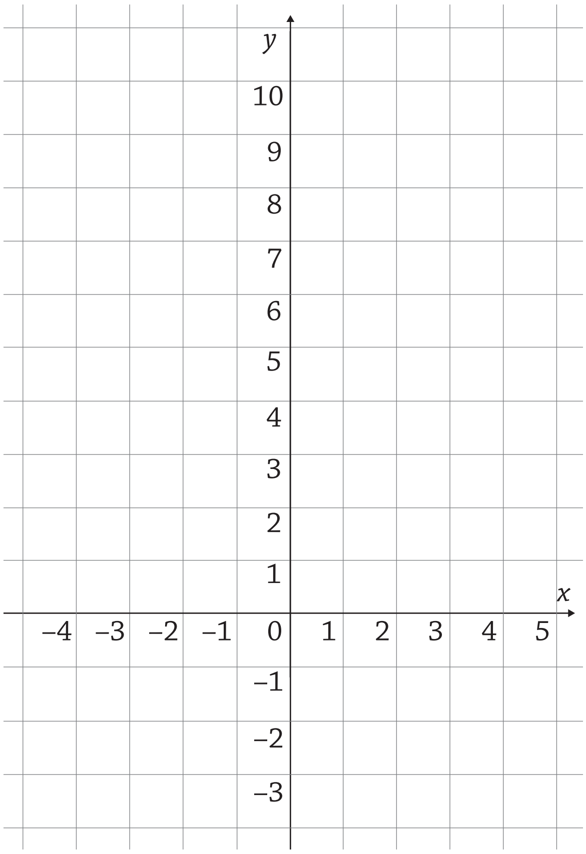


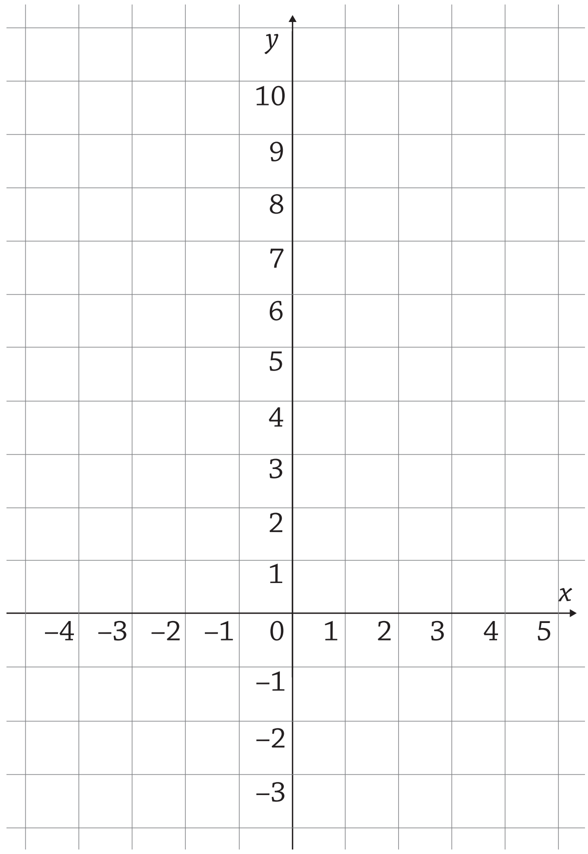


7. Načrtnite graf funkcie:

a) $f : y = -0{,}5 \cdot (2)^{x-3} + 3$

b) $g : y = 3 \cdot (0{,}2)^{x+1} - 2$





8. Určte, pre aké hodnoty parametra $p \in R$ je funkcia $f : y = (2p - 5)^x$ rastúca.

9. Určte, pre aké hodnoty parametra $m \in R$ je funkcia $f : y = (4 - 3m)^x$ klesajúca.

10. Načrtnite graf funkcie:

a) $f : y = |3^{x-2} - 1|$

b) $g : y = |-2 \cdot (0{,}5)^{x+3} + 2|$

c) $h : y = 2^{|x+1|}$

Logaritmické funkcie

1. Doplňte tabuľky a do jednej súradnicovej sústavy načrtnite grafy funkcií f a f^{-1}. Využite pri tom fakt, že logaritmická funkcia je inverznou funkciou k exponenciálnej funkcii s rovnakým základom, t. j. ak $[u, v] \in f$, potom $[v, u] \in f^{-1}$. Iný zápis: ak $f(u) = v$, potom $f^{-1}(v) = u$.

a) $f: y = 2^x, f^{-1}: y = \log_2 x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$							

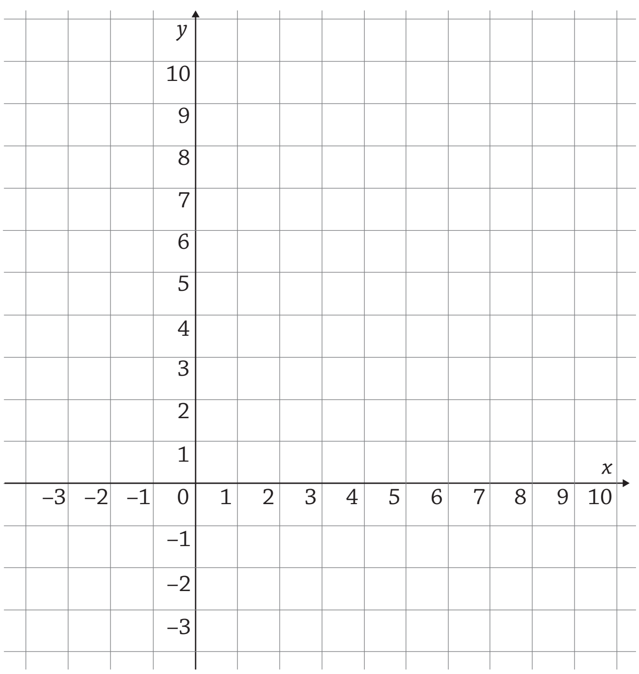
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	5
$f^{-1}(x) = \log_2 x$							

b) $f: y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, f^{-1}: y = \log_{\frac{1}{3}} x$

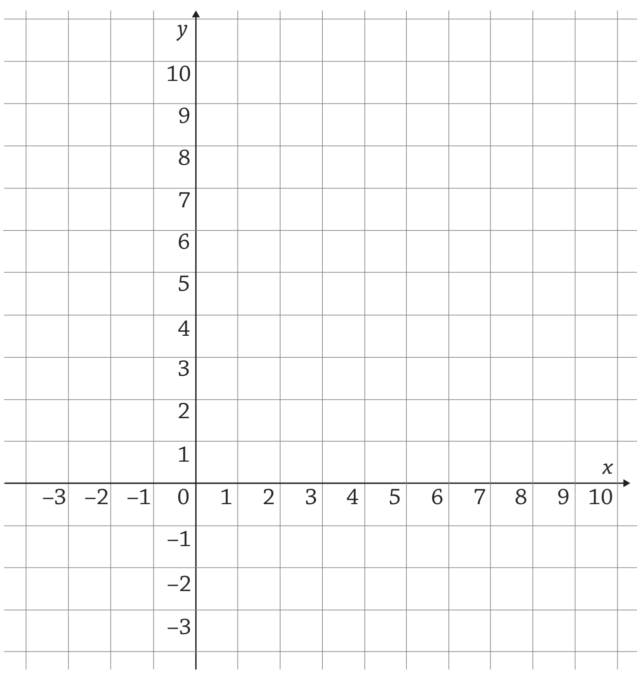
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$							

x	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$							

a)



b)



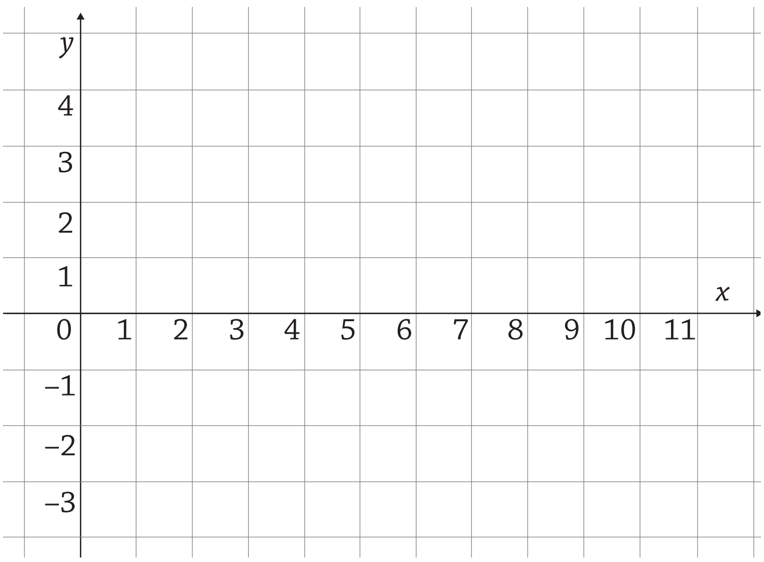
2. Využite definíciu logaritmu a doplňte podľa vzoru:

$\log_2 8 = 3$	lebo $2^3 = 8$
$\log_5 25 =$	lebo
$\log_{10} 10000 =$	lebo
$\log_{10} 0{,}01 =$	lebo
$\log_6 1 =$	lebo
$\log_4 4 =$	lebo

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{81}\right) =$	lebo
$\log_7\left(\frac{1}{49}\right) =$	lebo
$\log_{\frac{1}{5}}(125) =$	lebo
$\log 10^5 =$	lebo
$\log 10^{-9} =$	lebo
$\ln e =$	lebo

3. Doplňte do tabuľky hodnoty logaritmov zaokrúhlené na 3 desatinné miesta. Použite kalkulačku alebo tabuľky. Potom načrtnite graf dekadickej logaritmickej funkcie $f: y = \log x$ a opíšte jej vlastnosti.

x	0,2	0,5	0,9	1	2	4	6	8	10	20	100
$\log x$											



4. Určte pomocou kalkulačky hodnoty logaritmov pri rôznych základoch. Ak ich vaša kalkulačka nevie určiť priamo, použite na výpočet vetu d) o logaritmoch.

$\log_3 5 =$ $\qquad$ $\log_8 20 =$ $\qquad$ $\log_7 6 =$

$\log_{0{,}5} 10 =$ $\qquad$ $\log_7 0{,}8 =$ $\qquad$ $\log_e 7 = \ln 7 =$

5. Bez použitia kalkulačky určte, koľko z čísel $\log_6 3$; $\log_4 0{,}7$; $\log_{0,2} 8$; $\log_{0,8} \left(\frac{1}{4}\right)$; $\log_{15} 1$; $\log 10^5$ je kladných.

6. Vypočítajte bez použitia kalkulačky hodnoty číselných výrazov s logaritmami. Použite vety o logaritmoch.

a) $\log_2 24 - \log_2 3$

b) $\log 5 + \log 6 - \log 3$

c) $\log_3 \sqrt[5]{9}$

7. Určte definičný obor daných funkcií.

a) $f : y = \log_3 (x + 4)$

b) $g : y = \dfrac{5}{\log (x - 2)}$

c) $h : y = \log \left(\dfrac{2x - 3}{x + 1}\right)$

d) $i : y = \log_{0,5} (8 - 4x) + \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x + 2}$

8. Načrtnite graf funkcií:

a) $f: y = \log_2 (x + 1) - 2$

b) $g: y = \left|\log_{\frac{1}{3}} (x - 3) + 1\right|$

c) Z grafu funkcie f určte všetky reálne čísla x, pre ktoré je $f(x) < 0$.

d) Z grafu funkcie g určte všetky reálne čísla x, pre ktoré je $g(x) = 1$.

9. Do jednej súradnicovej sústavy načrtnite graf funkcie f a k nej inverznej funkcie f^{-1}. Určte aj rovnicu inverznej funkcie, definičný obor a obor hodnôt oboch funkcií.

a) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

b) $f: y = 3\log_3(x + 3) - 1$

Exponenciálne a logaritmické rovnice a nerovnice

1. Riešte v R exponenciálne rovnice a nerovnice.

a) $2^{2x-5} = 32$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4} = 27$

c) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x} = \frac{49}{16}$

d) $8 \cdot 8^{2x-3} = 16^{3x-5}$

e) $100 \cdot 10^{x-4} = 0{,}001$

f) $2^x \cdot 5^x = \frac{(10^{x-1})^5}{10}$

g) $13^{x^2-3x+2} = 1$

h) $3^{x+2} - 6 \cdot 3^{x-1} = 63$

i) $9^{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt[3]{9}$

j) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

k) $9^x - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$

l) $\frac{1}{6^x} + 6^x = \frac{37}{6}$

m) $3^{x-1} = 8^x$

n) $5^{5-x} \leq 125$

o) $0{,}2^{x+3} < 0{,}04$

2. Riešte v *R* logaritmické rovnice a nerovnice.

a) $\log_3 (5x + 1) = 4$

b) $\log (x + 2) + \log (x - 7) = 2 \cdot \log (x - 4)$

c) $\log_5 (3x - 2) > \log_5 25$

d) $\log_{0,3} (x + 1) \leq \log_{0,3} (2x - 3)$

e) $\log_2 (x^2 - 3) + 1 = \log_2 (6x - 10)$

f) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 + 2 = 0$

g) $\frac{1}{\log x} = 2 - \log x$

h*) $\left(\frac{10}{x}\right)^{2 - \log x} = 100$

3. Mesto má 25 000 obyvateľov. O koľko rokov sa dá očakávať, že bude mať 30 000 obyvateľov, ak priemerný ročný prírastok obyvateľov je 1,3 %?

4. Intenzita röntgenového žiarenia sa zníži na polovicu pri prechode vrstvou olova s hrúbkou 13,5 mm. Určte hrúbku olovenej dosky, ktorá zoslabí intenzitu žiarenia na desatinu pôvodnej hodnoty, ak vieme, že jeho intenzita klesá exponenciálne.

5. Hodnota pH je definovaná ako záporný dekadický logaritmus koncentrácie oxóniových katiónov H_3O^+, t. j. pH = − log [H_3O^+].
Hodnota pOH je definovaná ako záporný dekadický logaritmus koncentrácie hydroxidových aniónov OH^-, t. j. pOH = − log [OH^-].
Platí: pH + pOH = 14.
Ak pH < 7, roztok je kyslý. Ak pH > 7, roztok je zásaditý. Ak pH = 7, roztok je neutrálny.

a) Vypočítajte pH roztoku, ak koncentrácia oxóniových katiónov H_3O^+ je 10^{-6} mol. dm^{-3}.
b) Hodnota pH roztoku HCl je 2,5. Vypočítajte koncentráciu oxóniových katiónov H_3O^+.
c) Vypočítajte pH roztoku CaOH, ak koncentrácia hydroxidových aniónov OH^- je 0,0216 mol · dm^{-3}.

6. Hlasitosť zvuku je subjektívna veličina a závisí od citlivosti sluchu. Pre objektívne hodnotenie zvuku môžeme použiť fyzikálnu veličinu **intenzita zvuku *I***. Je definovaná vzťahom $I = \frac{\triangle E}{\triangle S \cdot \triangle t} = \frac{\triangle P}{\triangle S}$, kde $\triangle E$ je prenesená energia, $\triangle S$ obsah plochy v smere kolmom na smer šírenia zvukovej vlny, $\triangle t$ časový interval a $\triangle P = \frac{\triangle E}{\triangle t}$ tzv. **akustický výkon** udávaný vo wattoch. Jednotka intenzity zvuku je W · m^{-2}. V praxi je vhodnejšie používať logaritmickú stupnicu a zaviesť tzv. **hladinu intenzity zvuku *L***, ktorá sa udáva v decibeloch. Jej súvislosť s intenzitou zvuku je daná vzťahom $L = 10 \,.\, \log \frac{I}{I_0}$, kde $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2} je intenzita tzv. **prahu počuteľnosti**.

a) Vypočítajte hladinu intenzity zvuku pre prah počuteľnosti ($I = I_0$).
b) Vypočítajte hladinu intenzity zvuku pre prah bolesti, ktorého intenzita je 1 W · m^{-2}.
c) Vypočítajte intenzitu zvuku hudby na diskotéke 1 meter od reproduktora, ak hladina intenzity tohto zvuku je 100 dB.
d) Zvuk elektrickej gitary bol zosilnený z 10^{-10} W · m^{-2} na 10^{-6} W · m^{-2}. Koľkokrát sa zvýšila intenzita zvuku? O koľko decibelov bol zvuk zosilnený?

STEREOMETRIA

Priamka je jednoznačne určená dvoma rôznymi bodmi: $p = \overleftrightarrow{AB}$

Rovina je jednoznačne určená:

- tromi rôznymi nekolineárnymi bodmi (neležia na jednej priamke): $\rho = \overleftrightarrow{KLM}$,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
- dvoma rôznobežnými priamkami,
- dvoma rovnobežnými priamkami.

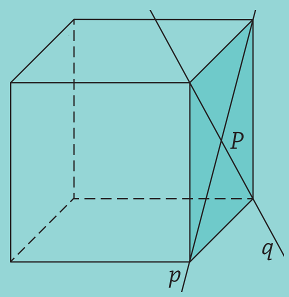
Vzájomná poloha dvoch priamok v priestore

$p \cap q = \{P\}$

$p \cap q = p$

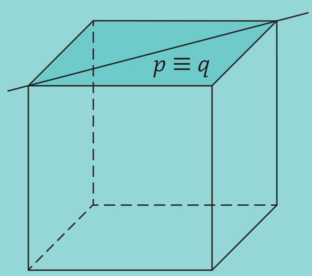
$p \cap q = \emptyset$

- $p, q \subset \rho$
- $p, q \not\subset \rho$



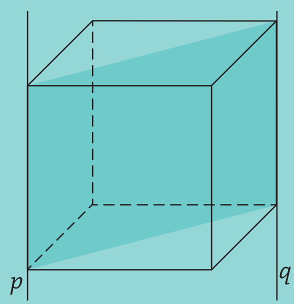
$p \times q$

p, q sú **rôznobežné**



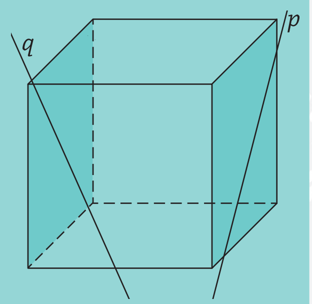
$p \equiv q$

p, q sú **totožné**
(špeciálny prípad rovnobežnosti)



$p \parallel q$

p, q sú **rovnobežné**, ležia v jednej rovine

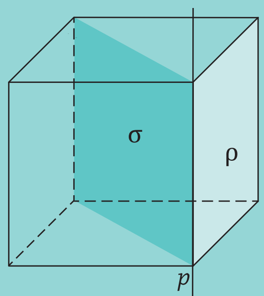


$p \quad q$

p, q sú **mimobežné**, neležia v jednej rovine

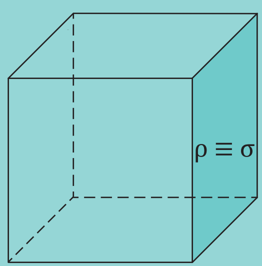
Vzájomná poloha dvoch rovín v priestore

$\rho \cap \sigma = p, \rho \times \delta$



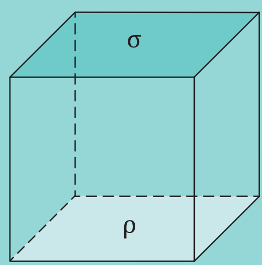
ρ, σ sú **rôznobežné**

$\rho \cap \sigma = \rho, \rho \equiv \delta$



ρ, σ sú **totožné**
(špeciálny prípad rovnobežnosti)

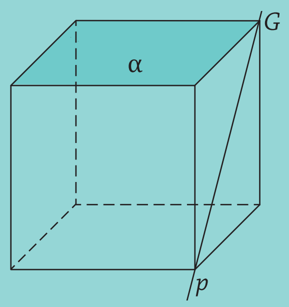
$\rho \cap \sigma = \emptyset, \rho \parallel \delta$



ρ, σ sú **rovnobežné**

Vzájomná poloha priamky a roviny v priestore

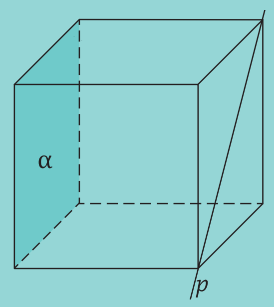
$p \cap \alpha = \{G\}$



$p \times \alpha$

p je rôznobežná s α.

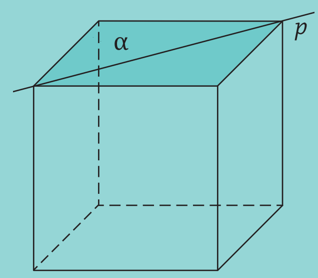
$p \cap \alpha = \emptyset$



$p \parallel \alpha$

p je rovnobežná s α.

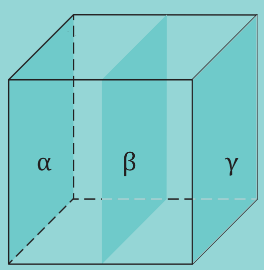
$p \cap \alpha = p$



$p \subset \alpha$

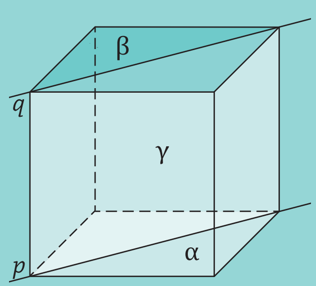
p leží v α.
(špeciálny prípad rovnobežnosti)

Vzájomná poloha troch rovín v priestore



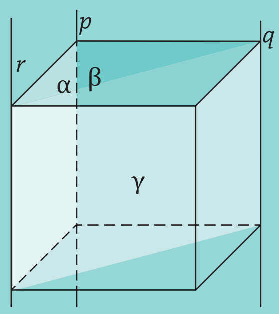
Nemajú spoločné body,
sú rovnobežné.
$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$

Majú spoločné všetky body,
sú totožné (splývajúce).
$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma$



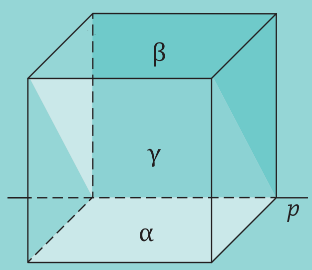
Sú rôznobežné.
$\alpha \parallel \beta \nparallel \gamma$

$\alpha \cap \beta = \emptyset$
$\alpha \cap \gamma = p$
$\beta \cap \gamma = q$
$p \parallel q$

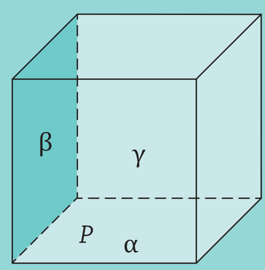


Sú rôznobežné.
$\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma$

$\alpha \cap \beta = p$
$\beta \cap \gamma = q$
$\alpha \cap \gamma = r$
$p \parallel q \parallel r$



Majú spoločnú
priamku p,
$\alpha \cap \beta \cap \gamma = p$
sú rôznobežné
$\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma$



Majú spoločný bod P,
$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$
sú rôznobežné
$\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma$

Rez telesa rovinou

Rez telesa je prienik telesa a roviny. Rezy telies sa používajú napríklad v technickom kreslení pri znázorňovaní vnútra predmetov. Hranica rezu mnohostena je spravidla mnohouholník, ktorého strany nájdeme ako prienik stien mnohostena s rovinou rezu.

Zjednodušený návod na konštrukciu rezu:

- Hľadáme dva body ležiace v jednej rovine, lebo nimi je jednoznačne určená priamka.
- V prípade rovnobežnostena využijeme vetu: ***Ak je rovina rôznobežná s dvomi rovnobežnými rovinami, tak ich pretína v rovnobežných priamkach.***
- Ak máme len jeden bod v rovine, snažíme sa nájsť ďalší bod predĺžením hrán telesa tak, aby sme nimi mohli zostrojiť priamku.

Ak v žiadnej stene telesa neležia dva body roviny rezu, musíme najprv nájsť priesečník priamky určenej dvomi bodmi roviny rezu so stenou, v ktorej leží tretí bod roviny rezu.

Zostrojte rez kocky *ABCDEFGH* rovinou $\rho = \overleftrightarrow{KLM}$, ak *K* je stred hrany *EH*, *L* je stred hrany *GH* a bod *M* leží na hrane *BC* tak, že $|CM| = \frac{1}{4}|BC|$.

Zápis postupu konštrukcie:

1. KL
2. $p \parallel KL \land M \in p$

   $p \cap AB = \{N\}$

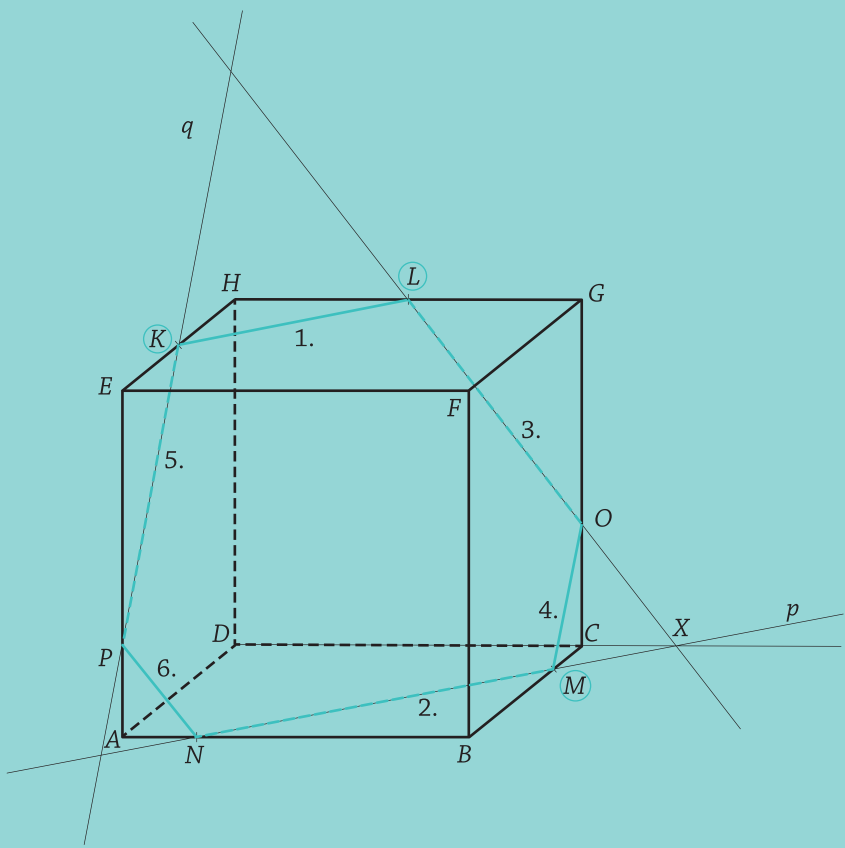
   MN
3. $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{DC} = \{X\}$

   $XL \cap CG = \{O\}$

   OL
4. OM
5. $q \parallel OM \land K \in q$

   $q \cap AE = \{P\}$

   PK
6. PN

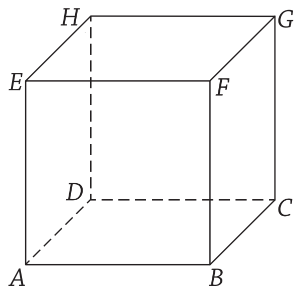


Pri každej konštrukcii rezu treba aspoň v obrázku vyznačiť poradie krokov konštrukcie.

Vzájomná poloha priamok a rovín v priestore

1. Vo voľnom rovnobežnom premietaní je zobrazená kocka v najčastejšie používanom pohľade – nadhľade sprava. Načrtnite obraz kocky v ďalších pohľadoch.

Nadhľad sprava | Nadhľad zľava | Podhľad sprava | Podhľad zľava



2. Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV* s podstavnou hranou veľkosti $a = 3$ cm a výškou $v = 4$ cm. Narysujte aj jeho pôdorys (pohľad zhora), nárys (pohľad spredu) a bokorys (pohľad zboku).

3. Nájdite na internete informácie o iných spôsoboch znázorňovania trojrozmerného priestoru do roviny (napr. vrstevnice, lineárna perspektíva...). Kde sa používajú tieto spôsoby znázorňovania?

4. V kocke *ABCDEFGH* sú body *P*, *Q*, *R* postupne stredmi hrán *GH*, *CG*, *CD*. Určte vzájomnú polohu priamky *EP* s priamkami *FH*, *AR*, *FB*, *FG*, *BQ* a *AQ*.

Doplňte symboly vzájomnej polohy.

Ak sú priamky rôznobežné, označte ich priesečník.

$\overleftrightarrow{EP}$ $\quad$ $\overleftrightarrow{FH}$

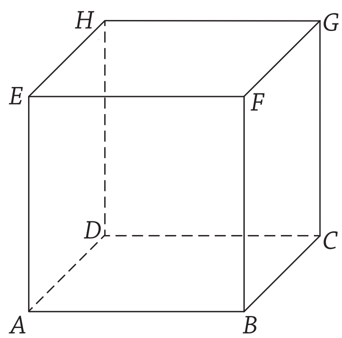
$\overleftrightarrow{EP}$ $\quad$ $\overleftrightarrow{AR}$

$\overleftrightarrow{EP}$ $\quad$ $\overleftrightarrow{FB}$

$\overleftrightarrow{EP}$ $\quad$ $\overleftrightarrow{FG}$

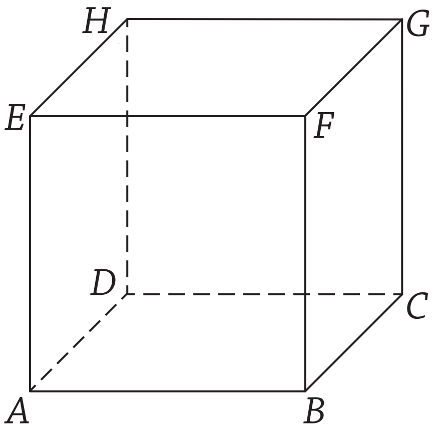
$\overleftrightarrow{EP}$ $\quad$ $\overleftrightarrow{BQ}$

$\overleftrightarrow{EP}$ $\quad$ $\overleftrightarrow{AQ}$

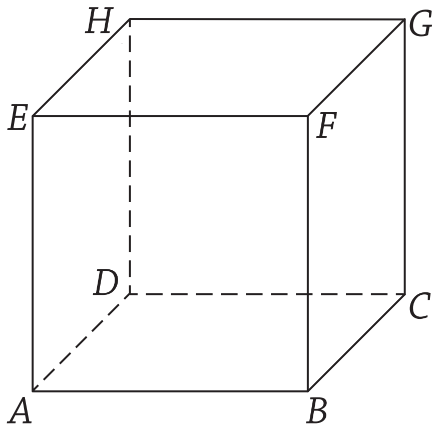


5. V kocke $ABCDEFGH$ sú body K, L, M postupne stredmi hrán EF, BF, FG. Určte vzájomnú polohu dvoch rovín. V prípade, že sú roviny rôznobežné, nájdite aj ich priesečnicu.

a) $\alpha = \overleftrightarrow{EBG}$, $\beta = \overleftrightarrow{KLM}$

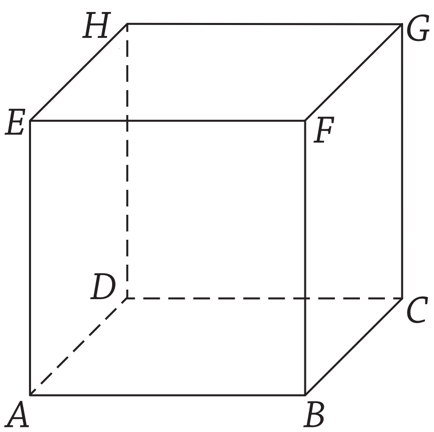


b) $\rho = \overleftrightarrow{ACH}$, $\delta = \overleftrightarrow{DBF}$

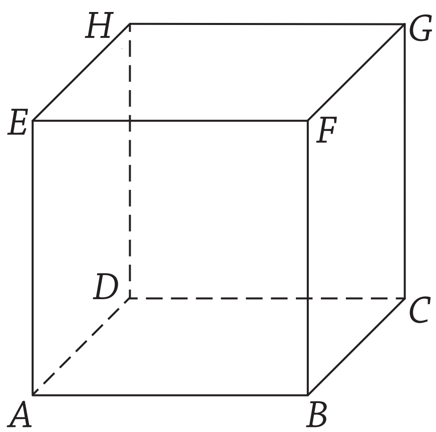


6. Daná je kocka $ABCDEFGH$, Q je stred prednej steny, R je stred pravej steny. Rozhodnite o vzájomnej polohe priamky a roviny.

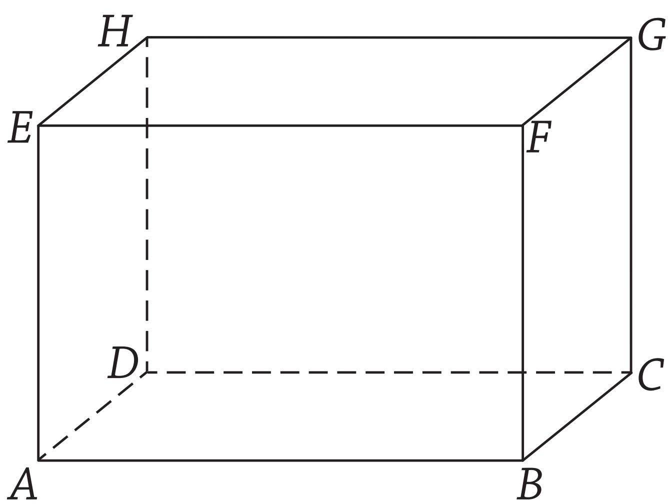
a) $m = \overleftrightarrow{QR}$, $\alpha = \overleftrightarrow{ACG}$



b) $p = \overleftrightarrow{EC}$, $\rho = \overleftrightarrow{DBG}$



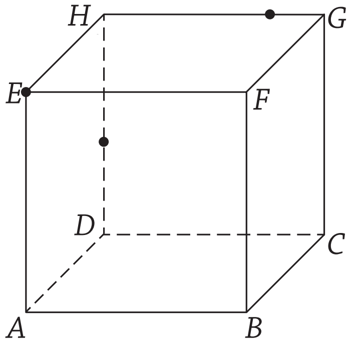
7. V kvádri $ABCDEFGH$ určte priesečník priamky $m = \overleftrightarrow{EK}$ s rovinou $\rho = \overleftrightarrow{ABH}$, ak K leží na hrane CG tak, že $|CK| : |CG| = 1 : 3$. Návod: Priamkou EK preložte vhodnú rovinu a nájdite priesečnicu danej roviny a preloženej roviny. Hľadaný priesečník je prienik danej priamky a nájdenej priesečnice. Podľa návodu k tejto úlohe určte aj priesečník v úlohe 6. b).



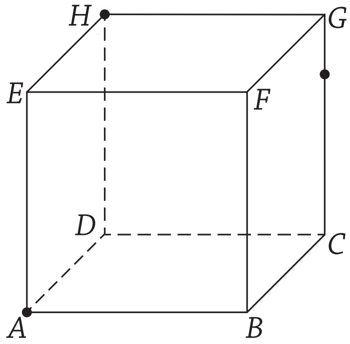
Rezy telies

1. Zostrojte rez kocky danou rovinou určenou vyznačenými bodmi. Pri zostrojovaní rezu v obrázku priebežne vyznačujte poradie krokov konštrukcie. Strany rezu ležiace v stenách, ktoré nevidíme, rysujte čiarkovanou čiarou.

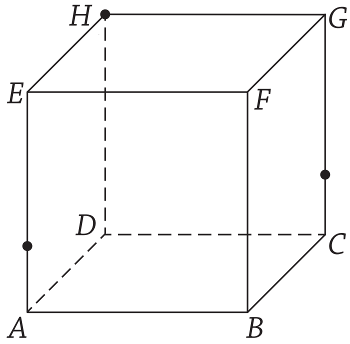
a)



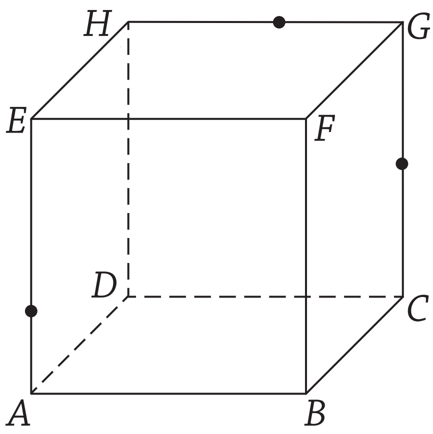
b)



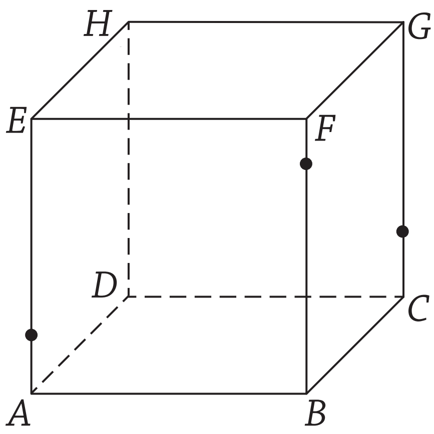
c)



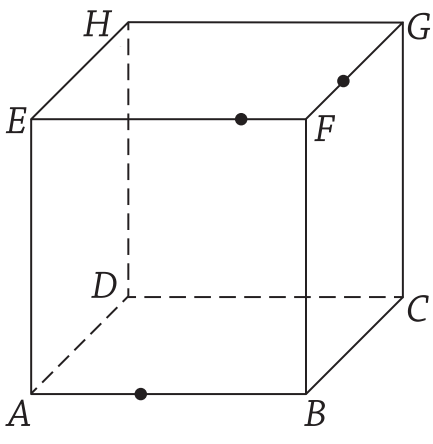
d)



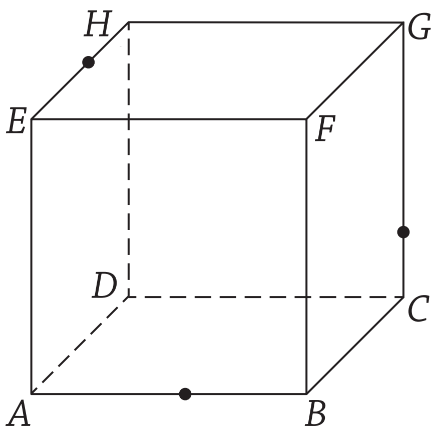
e)



f)

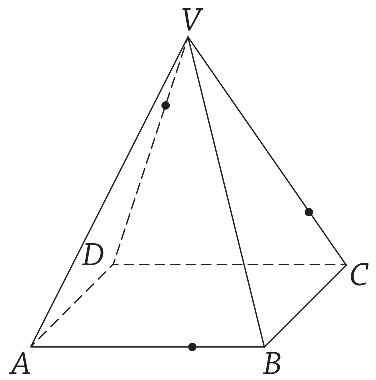


g*)

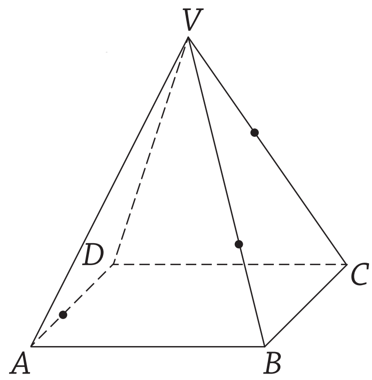


2. Zostrojte rez telesa danou rovinou určenou vyznačenými bodmi. Pri zostrojovaní rezu v obrázku priebežne vyznačujte poradie krokov konštrukcie. Strany rezu ležiace v stenách, ktoré nevidíme, rysujte čiarkovanou čiarou.

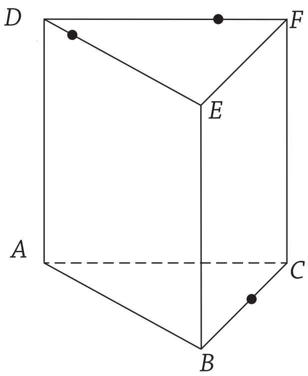
a)



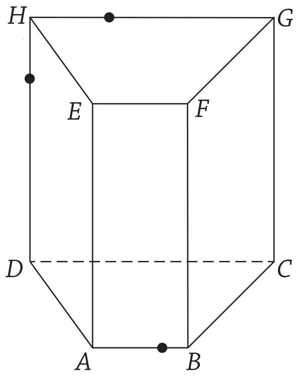
b)



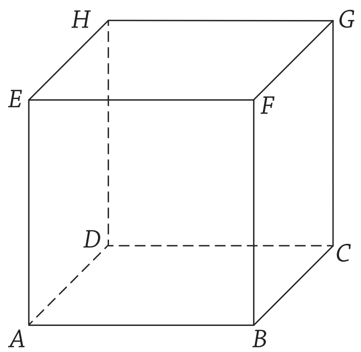
c)



d)



3. Kocka *ABCDEFGH* má hranu dĺžky 3 cm. Označme *S* stred hrany *AE*. Vypočítajte obsah rezu tejto kocky rovinou *BCS*.



SKONTROLUJTE SA

KOMBINATORIKA • Slovné úlohy – vypisovanie možností, kombinatorické pravidlá

1 a) AJE, AEJ, JAE, JEA, EAJ, EJA, 6 b) 4 • 2 {č, m}, {č, z}, {č, b}, {č, o}, {m, z}, {m, b}, {m, o}, {z, b}, {z, o}, {b, o} – 10, pre výber troch pier máme rovnaký počet možností – 10. Dostaneme ich tak, že vypíšeme farby, ktoré zostali: {z, b, o}, {m, b, o}, ... • 3 1577, 1757, 1775, 5177, 5717, 5771, 7157, 7175, 7517, 7571, 7715, 7751 – 12 čísel. • 4 2 jednociferné, 4 dvojciferné, 8 trojciferných – spolu 14. • 5 a) 6 b) 12 • 6 10 • 7 8 • 8 55 • 9 10 • 10 10

Faktoriál, kombinačné číslo, výrazy, rovnice

1 a) 720 b) 42 c) 1470 d) 1/120 • 2 $x > y$ • 3 a) 10 b) 10 c) 20 d) 35 e) 35 f) 70 g) 10 h) 10 i) 1 • 5 a) 6 b) 4 c) 10 d) 5 e) 1 f) 6 • 6 a) $\binom{7}{7} = 1$ b) $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$ c) $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$ d) $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$ e) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ f) $\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{10}{6}$ g) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$ h) $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$ • 7 a) $x^2 - x, x \in N, x \geq 2$ b) $n^3 + 3n^2 + 2n$, $n \in N$ c) $1/(k^2 + 5k + 6)$, $k \in N_0 \cup \{-1\}$ d) $9s^2 + 9s + 2$, $s \in N_0$ • 8 a) 9 b) 7 c) 3 d) 5 • 9 a) 5 b) 17 c) 6 d) Nemá riešenie.

Mix slovných úloh

1 210 • 2 720 • 3 2024 • 4 a) 120 b) 216 • 5 a) 151 200 b) 15 120 c) 60 480 d) 16 800 • 6 1 663 200 • 7 a) 6 b) 120 c) 60 d) 840 e) 151 200 • 8 a) 36 b) 27 • 9 19 • 10 a) 3 432 b) 1 260

PRAVDEPODOBNOSŤ • Slovné úlohy – Laplaceova schéma, vlastnosti pravdepodobnosti

2 1/6 = 0,1667 = 16,67 % • 3 a) 1/2 b) 1/3 c) 5/6 • 4 5/7 • 5 a) 32,97 % b) 49,45 % c) 34,07 % • 6 a) 42,86 % b) 2,86 % c) 28,57 % • 7 a) 10 % b) 1 % c) 50 % • 8 a) 0 b) 7,78 % • 9 a) 8,33 % b) 41,67 % c) 91,67 % d) 0 % • 10 28,57 % • 11 0,93 • 12 a) 1,13 % b) 0,08 % c) 0,48 % d) 66,05 % • 13 Pri hode 2 kockami. • 14 0,00008 % • 15 a) 16,75 % b) 32,66 % • 16 0,0017 %

Nezávislosť javov, Bernoulliho schéma

1 a) 2,78 % b) 27,78 % c) 30,56 % d) 69,44 % • 2 8,33 % • 3 a) 0,504 b) 0,006 c) 0,994 d) 0,902 • 4 a) 3,13 % b) 0,01 % c) 80,38 % d) 19,62 % • 5 a) Vykvitnú všetky tri. b) Nevykvitne žiaden. c) Aspoň jeden nevykvitne. • 6 a) 6,5 % b) 26 % c) 5,76 % d) 94,24 % • 7 a) 0,19 % b) 0,19 % c) 10,42 % • 8 a) 26,87 % b) 43,78 % • 9 a) 87,91 % b) 12,09 % c) 0,00001 % • 10 a) 58,14 % b) 99,99 % • 11 61,60 % • 12 9,11 %

Geometrická pravdepodobnosť

1 2,5 % • 2 16,67 % • 3 44,44 % • 4 78,54 % • 5 29,22 % • 6* 43,5 %

FUNKCIE A ICH VLASTNOSTI • Funkcie

1 $f: m = 3$ h, 195 € • 2 a) $f: h = 80 - 5t^2$, 4 s • 3 a) Áno b) Nie c) Nie d) Áno e) Áno • 4 f nie je funkcia, g je funkcia, $D(g) = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$, $H(g) = \{-3, -2, 2, 3\}$. • 5 a) f je funkcia, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -4, \infty)$. b) Nie je funkcia. c) f je funkcia, $D(f) = \langle -2, 6 \rangle$, $H(f) = \langle -1, 2 \rangle \cup (3, 4\rangle$. d) Nie je funkcia. e) Nie je funkcia. f) f je funkcia, $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty, 3\rangle$. • 6 a) $f(3) = -3$, $f(0) = 6$, $f(-2) = 12$ b) 4/3, 10/3 c) [2, 0], [0, 6] • 7 $D(f) = (-2, 3\rangle$, $H(f) = (-6, 4\rangle$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(3) = 4$, priesečníky s osou x: [−1, 0], [1, 0], [2, 0], $f(-1, 7) < 0$, $f(-0, 6) > 0$, $f(0, 3) > 0$, $f(1, 5) < 0$, $f(2, 8) > 0$, $f(x) > 0$ pre $x \in (-1, 1) \cup (2, 3\rangle$, $f(x) \leq 0$ pre $x \in (-2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$ • 8 −4 je z $H(f)$, 3 nie je z $H(f)$. • 9 $D(f) = R$, $D(g) = R - \{-5, 2\}$, $D(h) = \langle -4, 1) \cup (1, \infty)$

Vlastnosti funkcií

1 a) $D(f) = \langle 2, 6\rangle$, $H(f) = \langle -4, 5)$, klesajúca na (2, 3), rastúca na (3, 6), minimum pre $x = 3$, maximum nemá, je ohraničená zhora aj zdola. b) $D(f) = (-2, 4\rangle$, $H(f) = \langle -4, 5\rangle$, rastúca na (−2, 1), klesajúca na (1, 4), maximum pre $x = 1$, minimum pre $x = 4$, ohraničená zdola aj zhora. c) $D(f) = R - \{2\}$, $H(f) = (-3, \infty)$, rastúca na $(-\infty, 2)$, klesajúca na $(2, \infty)$, nemá maximum ani minimum, je ohraničená zdola, nie je ohraničená zhora. d) $D(f) = R$, $H(f) = R$, klesajúca. e) $D(f) = \langle -4, 4)$, $H(f) = \langle 0, 12\rangle$ f) $D(f) = \langle -3, \infty)$, $H(f) = \langle -4, \infty\rangle$ • 4 f je prostá, $D(f) = \{-1, 2, 4, 5\} = H(f^{-1})$, $H(f) = \{-2, 1, 2, 3\} = D(f^{-1})$.

LINEÁRNE A KVADRATICKÉ FUNKCIE • Lineárne funkcie

2 $f: y = -2x + 2$ • 3 a) $x = 3/2$ b) $x \in (2, \infty)$ c) $x \in \langle 1, 3)$ • 4 b) $f: V = -0{,}07s + 35$, $D(f) = \langle 0, 500\rangle$ km, $H(f) = \langle 0, 35\rangle$ l, c) 25,55 l d) 471,43 km • 5 a) $f: l = 0{,}1$ m + 30 b) 50 cm c) 120 g d) 30 cm • 6 a) $K = \{[1, -3]\}$ b) $K = \emptyset$, sústava nemá riešenie. c) $K = \{[-2, 1]\}$ d) $K = \{[x, y] \in R^2$, $y = (x - 3)/2\}$, sústava má nekonečne veľa riešení. • 8 d*) Ak $m \in (-\infty, -1)$, rovnica nemá riešenie. Ak $m = -1$, rovnica má 1 riešenie. Ak $m \in (-1, \infty)$, rovnica má 2 riešenia.

Kvadratické funkcie

2 a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = -2x^2 + 12x - 16$ c) $y = 3x^2 + 6x$ d) $y = -x^2 + 8x - 15$ • 3 a) $y = (x - 3)^2 - 2$ b) $y = 2(x + 1)^2 - 3$ c) $y = (x + 3/2)^2 + 7/4$ d) $y = 1/2(x + 3)^2 - 1/2$ e) $y = -3(x - 2/3)^2 + 1/3$ • 4 a) $x = -1$, $x = 2$ b) Priesečníky s osou x: $[-2, 0]$, $[3, 0]$, priesečník s osou y: $[0, 6]$. c) $V[1/2, 25/4]$ d) $y = -(x - 1/2)^2 + 25/4 = -x^2 + x + 6$ • 5 Nulové body: -4, 2, $f(x) > 0$, ak $x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$. • 6 $f(x) < 0$, ak $x \in (0, 4)$ • 7 a) $K = \{-3, 2\}$ b) $K = \langle -1, 3\rangle$ c) $K = (-2, 0)$ d) $K = (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$ e) $K = \emptyset$ f) $K = R - \{2\}$ • 8 a) $f: y = 2x^2 + 5x - 3$ b) $f: y = x^2 - 5x + 6$ • 9 $f: y = 2x^2 - 3$ • 10 Najväčší obsah má štvorec so stranou 6 cm. • 11 Súčet druhých mocnín je minimálny, ak obidva sčítance sú 4. • 12 a) $f: y = -0{,}01x^2 + 5x = -0{,}01(x - 250)^2 + 625$ b) 250 žiakov, 625 €, 2,50 € c) 2 €, 600 €

MOCNINOVÉ FUNKCIE • Mocninové funkcie s prirodzeným exponentom

2 Definičný obor všetkých ôsmich funkcií je R. $H(f_1) = H(f_2) = H(f_4) = \langle 0, \infty)$, $H(f_3) = \langle -1, \infty)$, $H(g_1) = H(g_2) = H(g_3) = R$, $H(g_4) = \langle 0, \infty)$

Mocninové funkcie so záporným celočíselným exponentom

3 a) PÚ b) NÚ c) PÚ d) NÚ e) NÚ f) PÚ g) NÚ • 4 $f: t = 10/p$, grafom sú iba izolované body. • 5 a) $f_2: y = (x - 3)^{-2}$, $f_3: y = (x - 3)^{-2} - 2$ b) $g_2: y = (x + 1)^{-3}$, $g_3: y = (x + 1)^{-3} + 3$ • 7 $g: y = -1/(x - 2) - 2$, $D(g) = R - \{2\}$, $H(f) = R - \{-2\}$

EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE • Exponenciálne funkcie

1 Exponenciálne sú funkcie g, h, j. • 3 a) $(2{,}7)^{-1} < (2{,}7)^{-0{,}4} < (2{,}7)^{0{,}2} < (2{,}7)^3$ b) $(0{,}9)^{3{,}5} < (0{,}9)^{0{,}6} < (0{,}9)^{-0{,}71} < (0{,}9)^{-4}$ c) $(0{,}2)^3 < (0{,}7)^3 < (0{,}45)^0 < (3{,}1)^{4{,}6} < (0{,}1)^{-4}$ • 4 $2^{63} = 9{,}22 \cdot 10^{18}$ • 5 $f: h = 9900 \cdot 0{,}82^r$, Po 7 rokoch bude hodnota auta 2 468 €. • 8 $p \in (3, \infty)$ • 9 $m \in (1, 4/3)$

Logaritmické funkcie

2 $\log_5 25 = 2$; $\log_{10} 10000 = 4$; $\log_{10} 0{,}01 = -2$; $\log_6 1 = 0$; $\log_4 4 = 1$; $\log_{1/3}(1/81) = 4$; $\log_7(1/49) = -2$; $\log_{1/5} 125 = -3$; $\log 10^5 = 5$; $\log 10^{-9} = -9$; $\ln e = 1$ • 4 $\log_3 5 = 1{,}465$; $\log_8 20 = 1{,}441$; $\log_7 6 = 0{,}921$; $\log_{0{,}5} 10 = -3{,}322$; $\log_7 0{,}8 = -0{,}115$; $\log_e 7 = \ln 7 = 1{,}946$ • 5 3 čísla sú kladné: $\log_6 3$, $\log_{0{,}8}(1/4)$, $\log 10^5$. • 6 a) 3 b) 1 c) 0,4 • 7 $D(f) = (-4, \infty)$, $D(g) = (2, 3) \cup (3, \infty)$, $D(h) = (-\infty, -1) \cup (3/2, \infty)$, $D(i) = \langle -3, -2) \cup (-2, 2)$ • 8 c) $x \in (-1, 3)$ d) $x \in \{4, 12\}$ • 9 a) $f^{-1}: y = \log_{0{,}5}(x - 2) + 1$, $D(f^{-1}) = H(f) = (2, \infty)$, $H(f^{-1}) = D(f) = R$ b) $f^{-1}: y = 3^{(x+1)/3} - 3$, $D(f^{-1}) = H(f) = R$, $H(f^{-1}) = D(f) = (-3, \infty)$

Exponenciálne a logaritmické rovnice a nerovnice

1 a) $K = \{5\}$ b) $K = \{1/2\}$ c) $K = \{-2/3\}$ d) $K = \{7/3\}$ e) $K = \{-1\}$ f) $K = \{3/2\}$ g) $K = \{1, 2\}$ h) $K = \{2\}$ i) $K = \{1/2\}$ j) $K = \{0, 1\}$ k) $K = \{3\}$ l) $K = \{-1, 1\}$ m) $K = \{\log 3/(\log 3 - \log 8)\}$ n) $K = \langle 2, \infty)$ o) $K = (-1, \infty)$ • 2 a) $K = \{16\}$ b) $K = \{10\}$ c) $K = (9, \infty)$ d) $K = (3/2, 4\rangle$ e) $K = \{2\}$ f) $K = \{3, 9\}$ g) $K = \{10\}$ h*) $K = \{1, 1000\}$ • 3 Približne o 14 rokov. • 4 44,9 mm • 5 a) 6 b) $3{,}16 \cdot 10^{-3}$ mol · dm^{-3} c) 12,33 • 6 a) 0 dB b) 120 dB c) 0,01 Wm^{-2} d) Intenzita zvuku sa 10 000-krát zväčšila, zvuk bol zosilnený o 40 dB.

STEREOMETRIA • Vzájomná poloha priamok a rovín v priestore

2 Pôdorys je štvorec, nárys a bokorys je rovnoramenný trojuholník. • 4 EP a FH sú rôznobežné, EP a AR sú rovnobežné, EP a FB sú mimobežné, EP a FG sú rôznobežné, EP a BQ sú rôznobežné, EP a AQ sú mimobežné. • 5 a) Rovnobežné. b) Rôznobežné, priesečnicou je priamka HS, kde S je stred spodnej steny. • 6 a) Priamka m je rovnobežná s rovinou α. b) Priamka p je rôznobežná s rovinou ρ.

Rezy telies

1 a) Rez je trojuholník. b) Rez je lichobežník. c) Rez je päťuholník. d) Rez je šesťuholník. e) Rez je päťuholník. f) Rez je päťuholník. g*) Rez je šesťuholník. • 2 a) Rez je päťuholník. b) Rez je päťuholník. c) Rez je päťuholník. d) Rez je šesťuholník. • 3 Rezom je obdĺžnik, $S = 9 \cdot \sqrt{5}/2 = 10{,}06$ cm^2.