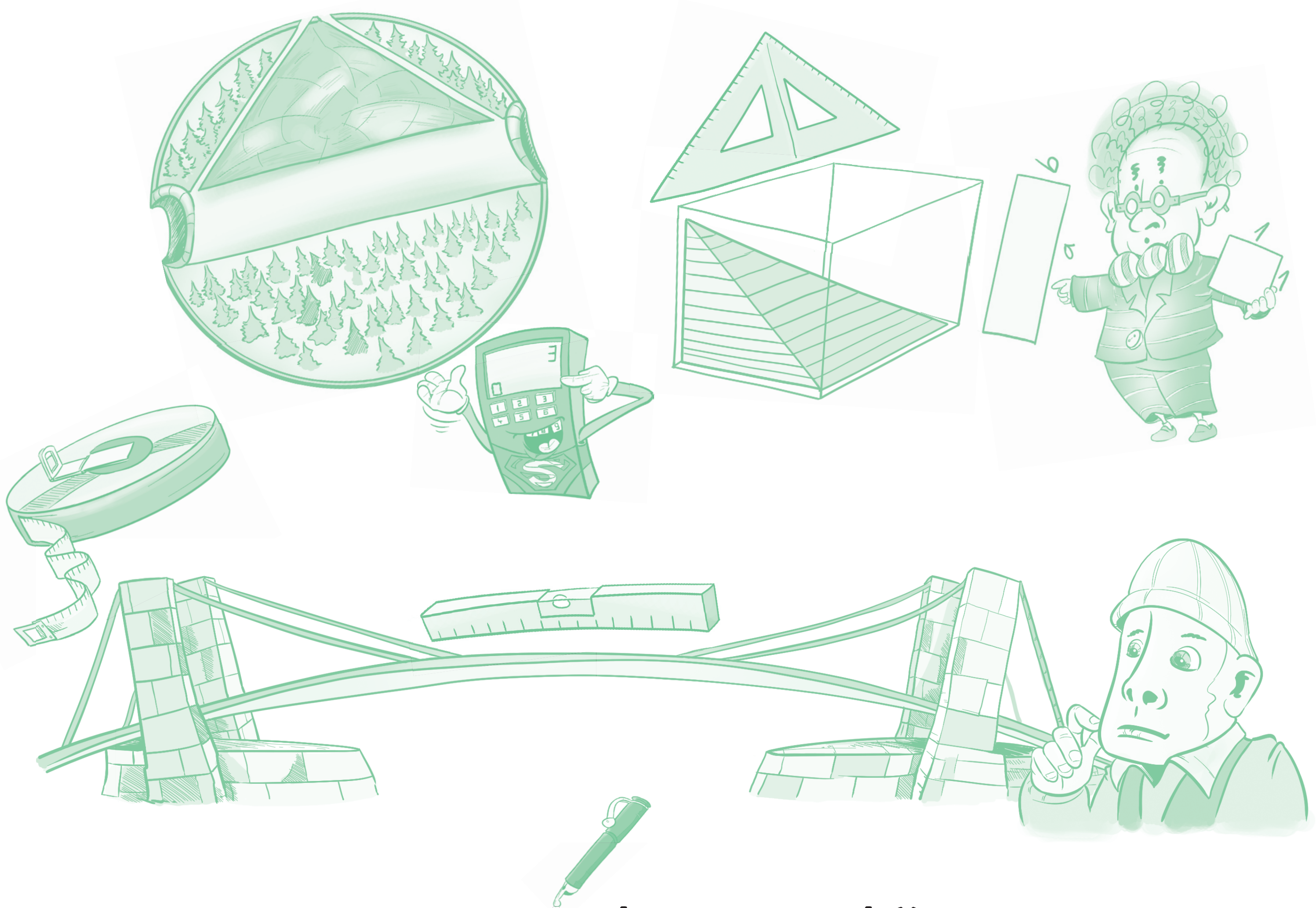
LiberaTerra

Miroslava Konrádová

MATEMATIKA

Pracovný zošit 1



pre gymnáziá a stredné školy

ČÍSLA A OPERÁCIE S NIMI

Deliteľnosť

Číslo $d \in N$ je **deliteľom** čísla $a \in Z$, ak $a : d = m$ (resp. $a = d \cdot m$), $m \in Z$.

2 – posledná cifra párna
182 – áno / 159 – nie

3 – ciferný súčet deliteľný 3
327 = 3 + 2 + 7 = 12 – áno
721 = 7 + 2 + 1 = 10 – nie

4 – posledné dvojčíslie deliteľné 4
1 324 – áno / 2 317 – nie

9 – ciferný súčet deliteľný 9
819 – áno / 218 – nie

8 – posledné trojčíslie deliteľné 8
9 816 – áno / 1 218 – nie

5 – posledná cifra 0 alebo 5
1 125 – áno / 1317 – nie

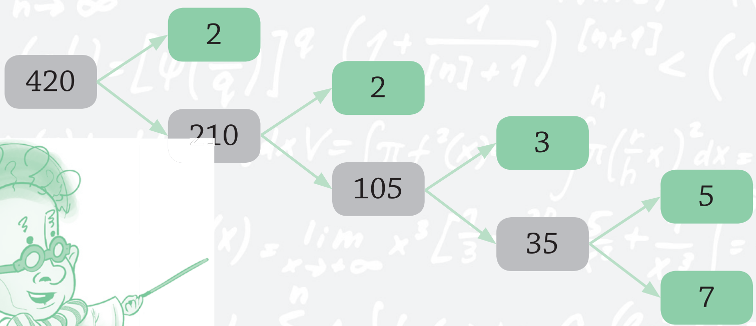
11 – striedavo odpočítame a pripočítame jednotlivé cifry – výsledok je deliteľný 11
5**1**7**6**2**5**9 = 5 – 1 + 7 – 6 + 2 – 5 + 9 = 11 – áno
1**3**1**8**9**6**7 = 1 – 3 + 1 – 8 + 9 – 6 + 7 = 1 – nie

10 – posledná cifra 0
810 – áno / 211 – nie

6 – deliteľné 2 a 3
672 – áno / 218 – nie

Číslo $a \in Z$ nie je deliteľné číslom $x \in N$, ak platí $a = kx + z$, kde $z \in Z$ je zvyšok po delení čísla a číslom x.

Rozklad čísla na prvočíselné delitele



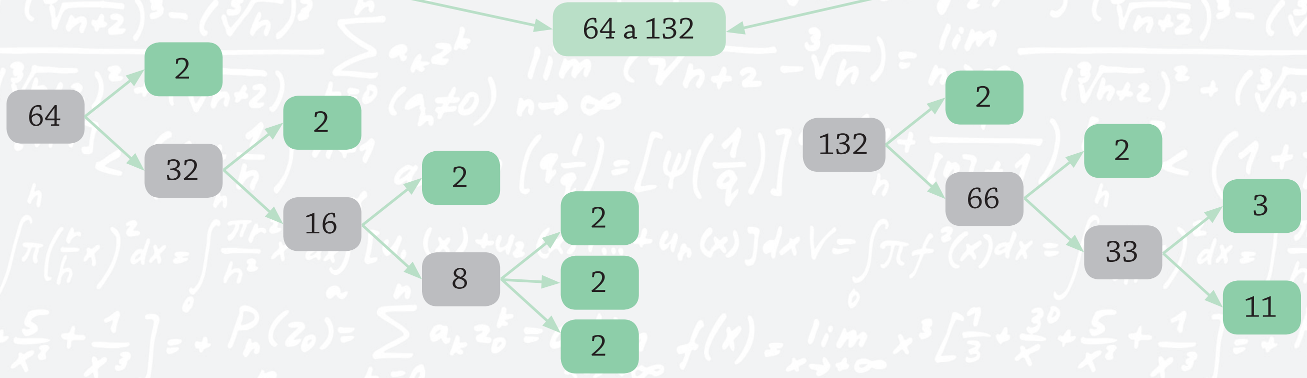
$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Delitele čísla 420
D_{420} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420}

Prvočíslo je prirodzené číslo, ktoré má práve dva delitele - jednotku a samé seba.
Jednotka nie je prvočíslo.

Najväčší spoločný deliteľ čísel

Najmenší spoločný násobok čísel



64	2	2	2	2	2	2			2^6
132	2	2					3	11	$2^2 \cdot 3 \cdot 11$
NSN	2	2	2	2	2	2	3	11	$2^6 \cdot 3 \cdot 11 = 2\,112$
NSD	2	2							$2 \cdot 2 = 4$

Percento, promile, pomer

Percento

$1\,\% = \frac{1}{100}$ celku

Promile

$1\,‰ = \frac{1}{1\,000}$ celku

Pomer

delenie celku v pomere $a : b : c$ ... delenie na diely o veľkosti k tak, že $k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c =$ celok

Zlomok

Zlomok ... $\frac{a}{b}$, $\frac{5}{8}$

Hodnota zlomku ... $a : b$, 0,625

Základný tvar zlomku

... čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné:

$$\frac{12}{16} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Zlomok a periodické desatinné číslo

$$0,\overline{42} = \frac{a}{b}$$

$$x = 0,\overline{42} \Rightarrow 100x = 42,\overline{42}$$

$$100x - x = 42,\overline{42} - 0,\overline{42}$$

$$99x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

Deliteľnosť a zlomky

1. Dedo dal vnukovi x eur a poslal ho kúpiť skrutky. Koľko najviac balení skrutiek mohol kúpiť, ak jedno balenie stojí k eur? Koľko eur vnukovi po nákupe ostalo?

a) $x = 107$, $k = 7$; b) $x = 108$, $k = 8$; c) $x = 109$, $k = 9$;

2. Nájdite všetky zvyšky po delení druhej mocniny čísla $n \in N$ číslom 4 a 6. Čo vám vyšlo?

n												
n^2												
zv(4)												
zv(6)												

3. Vypíšte všetky delitele čísla:

a) 18 b) 36 c) 24

4. Nasledujúce čísla rozložte na súčin prvočísel:

a) 360 b) 504 c) 588

5. Vyplňte tabuľku pre rôzne prirodzené čísla k.

k								
$6k + 4$								
$13k + 10$								
$19k + 15$								

6. Nájdite najmenší spoločný násobok a najväčšieho spoločného deliteľa čísel:

a) 20 a 45

b) 77 a 55

c) 24, 42 a 60

7. Kovová platňa má rozmery 1 620 cm a 1 800 cm. Túto platňu je potrebné na výrobu súčiastky rozdeliť na niekoľko menších štvorcových platní. Na aký najmenší počet takýchto štvorcových častí vieme pôvodnú platňu rozdeliť? Aký je obsah jedného takého štvorca?

8. Porovnajte zlomky.

a) $\frac{12}{77} \square \frac{9}{55}$

b) $\frac{7}{32} \square \frac{8}{28}$

c) $\frac{7}{36} \square \frac{5}{24}$

9. Janka dostane $\frac{3}{5}$ podiel a Danka $\frac{2}{7}$ podiel z toho istého pozemku. Ktorá dostane viac a o koľko?

10. Kráľovský otec mal tri dcéry. Prvej dal venom $\frac{3}{7}$ majetku, druhej $\frac{2}{9}$ majetku a tretej $\frac{1}{6}$ majetku. Aká časť majetku ostala kráľovi?

11. Sedem dvanástin okien na zámku je v tvare *n*-uholníka. Z týchto okien je šesť štrnástin v tvare štvoruholníka, pričom dve deviatiny z nich tvoria okná štvorcové. Koľko okien je na zámku, ak štvorcových okien je 15?

12. Otec našetril v banke istú sumu peňazí. Svojim štyrom deťom rozdelil túto sumu rovnakým dielom. Jedna z dcér darovala $\frac{3}{7}$ zo sumy, ktorú dostala, svojmu synovi a $\frac{4}{9}$ z nej svojej dcére. Akú časť z celej našetrenej sumy dostal syn a akú dcéra? Kto z nich dostal viac?

13. Z 1 400 eur v pokladni dostal Jano dve sedminy. Fero dostal dve pätiny zo zvyšku a potom Alena dve tretiny z toho, čo ostalo po Ferovej výplate. Kto dostal najviac eur? Koľko ostalo v pokladni?

14. Do skladu stavebného materiálu priviezli ráno niekoľko ton piesku. Prvý zákazník Adamík z neho odviezol päť šestín. Druhý zákazník Biely kúpil dve tretiny zo zvyšku a posledný zákazník Certis si odviezol tri pätiny zo zvyšku. Večer ostalo v sklade 80 kg piesku. Koľko ton piesku bolo ráno v sklade? Koľko kilogramov piesku si kúpili jednotliví zákazníci?

Percentá a promile

1. Pôvodná cena skateboardu bola 120 €, tenisky stáli 164 € a korčule 80 €. V rámci akcie v predajni zlacnelo všetko o 25 %. Aká je aktuálna cena skateboardu, tenisiek a korčúľ?

2. V Európskej únii je v súčasnosti 16 z každých 20 plastových fliaš recyklovaných. Koľko percent sa recykluje?

3. $\frac{5}{7}$ detí, ktoré navštevujú školu, sú dievčatá. Koľko percent žiakov školy tvoria chlapci?

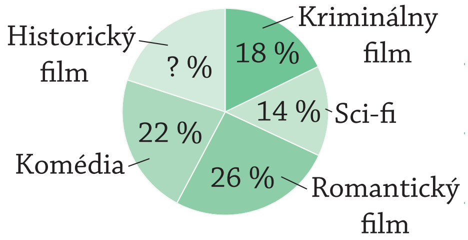
4. Vo výklade obchodu sa po Vianociach objavil nápis: „ZĽAVA 30 %“. Alex si v obchode kúpil tričko, ktoré z pôvodných 20 € zlacnelo na 15 €, nohavice, ktoré z pôvodných 35 € zlacneli na 24,50 €, a sveter, ktorý teraz stojí 13 € a predtým stál 17 €. Ktorý tovar zlacnel skutočne v súlade s reklamou?

5. Ema nazbierala 700 kg starého papiera. Patrik nazbieral o 15 % menej. Ďalší rok nazbierala Ema toľko ako Patrik vlani a Patrik o 15 % viac ako Ema. Ktorý z nich nazbieral počas oboch rokov viac kilogramov papiera a o koľko?

6. V novembri stál kabát 150 €. Hneď po Vianociach zlacnel aj s ostatným tovarom o 20 %. V marci vo výpredaji znovu zlacnel na 60 % povianočnej ceny. Koľko stál kabát v tom istom roku v apríli?

7. Notebook stál pred zľavou o 208 eur viac ako po zľave. O koľko percent zlacnel, ak si ho Valentín po zľave kúpil za 442 €?

8. 1 495 respondentov si v ankete zvolilo svoj najobľúbenejší filmový žáner. Výsledky ankety sú zaznamenané v kruhovom diagrame. Koľko ľudí uviedlo, že ich najobľúbenejším žánrom je historický film?



9. V decembri ponúkali v katalógu zájazd na Malorku v akcii s 15 % zľavou z pôvodnej augustovej ceny. Ten istý zájazd zdražel v marci v nasledujúcom roku o 15 %. Koľko stál tento zájazd pôvodne v auguste, ak sme ho v apríli kúpili za 1 173 €?

10. Na hokejovom zápase bol na začiatku plný štadión fanúšikov. Po prvej tretine odišlo 20 % fanúšikov a po druhej tretine odišla ešte $\frac{1}{6}$ zvyšných fanúšikov. Koľko fanúšikov bolo na štadióne na začiatku zápasu, ak do konca zápasu vydržalo 700 z nich?

11. Aké klesanie (v promile) má koryto rieky, ak na úseku dlhom 15 km klesne o 112 výškových metrov?

12. Zo Starého Smokovca na Hrebienok premáva pozemná lanovka. Jej stanice sú v nadmorskej výške 1 025 m n. m. v Starom Smokovci a 1 272 m n. m. na Hrebienku. Aké je stúpanie dráhy lanovky v promile, ak jej vodorovná dĺžka je 1 937 m?

13. Dopravná značka udáva stúpanie 4,3 ‰. Aký dlhý je úsek stúpania v kilometroch, ak sa na tomto úseku nadmorská výška zmení o 125 výškových metrov?

14. Cesta stúpa na úseku dlhom 7,8 km o 3 ‰. O koľko metrov cesta stúpa?

15. Koľko gramov alkoholu mali spolu v krvi traja pokutovaní vodiči, ak jednému z nich policajná hliadka namerala 1,55 ‰, druhému 1,32 ‰ a tretiemu 1,67 ‰ alkoholu? Hmotnosť krvi v krvnom obehu priemerného dospelého človeka je približne 5 kg.

16. Aký je ročný prirodzený prírastok obyvateľstva v promile, ak sa v krajine za rok narodilo 18 500 ľudí, zomrelo 13 200 ľudí a počet obyvateľov na začiatku roku bol 1 596 000?

17. Koľko ľudí žilo v krajine na konci roka, ak na začiatku ich bolo 1 048 000? Počas roka sa v krajine narodilo 11 730 detí, z krajiny sa vysťahovalo 1 350 osôb a späť do krajiny sa vrátilo alebo prisťahovalo 1 620 ľudí. Úmrtnosť počas roka bola 8,25 promile z pôvodného počtu obyvateľov.

Niečo málo z finančnej matematiky*

1. Zuzka si pred odchodom na zájazd vymenila v banke švajčiarske franky za 500 eur a české koruny za 300 eur.

			Devízy			Valuty		
Mena	**Kód**	**poč.**	**nákup**	**predaj**	**stred**	**nákup**	**predaj**	**stred**
Americký dolár	USD	1	1,0784	1,0524	1,065400	1,0926	1,0382	1,0654
Austrálsky dolár	AUD	1	1,4285	1,3941	1,411300	1,4473	1,3753	1,4113
Britská libra	GBP	1	0,8647	0,8439	0,854300	0,8761	0,8325	0,8543
Česká koruna	CZK	1	26,9520	26,3020	26,627000	27,3060	25,9480	26,6270
Nórska koruna	NOK	1	9,2719	9,0483	9,160100	9,3937	8,9265	9,1601
Poľský zlotý	PLN	1	4,2784	4,1752	4,226800			
Rumunský lei	RON	1	4,5860	4,4754	4,530700			
Ruský rubeľ	RUB	1	60,7800	59,3140	60,047000			
Švajčiarsky frank	CHF	1	1,0830	1,0568	1,069900	1,0972	1,0426	1,0699

a) Koľko švajčiarskych frankov a koľko českých korún má Zuzka?

b) Ak jej po návrate zo zahraničia ostalo 100 švajčiarskych frankov a 100 českých korún, koľko eur jej v banke vrátili?

c) Keby Zuzka na zájazde nič neminula a vymenila by celú sumu v českých korunách a švajčiarskych frankoch späť za eurá, akú sumu by dostala? O koľko viac/menej eur by mala po tejto výmene?

d) Koľko eur odpočíta banka zo Zuzkinho účtu, ak poslala príjemcovi v Spojených štátoch amerických sumu 150 amerických dolárov?

*Pri riešení úloh zanedbajte poplatky, ktoré si účtuje banka individiálne za realizáciu bankových úkonov.

2. V banke poskytli rodine Veselých úver vo výške 20 000 € s úrokovou sadzbou 14,5 % p. a. Po roku čiastku vrátili a podľa zmluvy s bankou zaplatili úrok. Koľko eur celkom banke zaplatili?

3. Libor si našiel popri zamestnaní brigádu. Za vykonanú prácu dostáva každý mesiac na účet 145,80 €. Aká je jeho hrubá mzda a koľko eur odvedie každý mesiac na daniach pri sadzbe dane 19 %? (Študenti pri odmene za prácu menšej ako 200 € nemusia platiť odvody.)

4. V banke si zakúpite dlhopis na 5 rokov za 2 500 eur. Banka pripisuje úrok na účet raz za rok a má stanovenú ročnú úrokovú mieru 3,8 %. Daň z úroku je 19 %. Koľko eur dostanete po piatich rokoch?

5. Potrebujeme si z banky požičať peniaze na 2 roky. Vieme, že budeme mať k dispozícii 5 000 eur na splatenie tohto dlhu. Koľko najviac eur (v celočíselnej sume) si môžeme z banky požičať, ak vieme, že aktuálna ročná úroková miera, ktorú nám banka ponúka, je 13 %?

Pomer

1. Určte pomer medzi údajmi v základnom tvare.

a) 15 kg : 21 kg =

b) 24 cm : 36 cm =

c) 12 m : 300 dm =

d) 72 t : 4500 kg =

2. Na výrobu sivej farby potrebujeme zmiešať čiernu a bielu farbu v pomere 5 : 3. Koľko litrov bielej/čiernej farby potrebujeme dokúpiť, ak máme k dispozícii:

Biela	**Čierna**
6 litrov	
12 litrov	
21 litrov	

Biela	**Čierna**
	15 litrov
	25 litrov
	40 litrov

3. Na výrobu šalátového dresingu potrebujeme zmiešať ocot a olej v pomere 2 : 5. Koľko oleja/octu treba pridať, ak sme už použili:

Olej	**Ocot**
	10 ml
1,5 l	
35 ml	

Olej	**Ocot**
	42 ml
50 ml	
	3 l

4. Celková vzdialenosť, ktorú prekonajú reprezentanti v triatlone, je 15 km. Triatlon tvorí plávanie, cyklistika a beh v pomere 2 : 3 : 5. Aká dlhá je každá z týchto častí?

5. Pomer medzi počtom mužov, žien a detí na futbalovom zápase je 11 : 4 : 5. Koľko mužov bolo na zápase, ak

a) všetkých divákov spolu bolo 3 000?

b) žien a detí spolu bolo 360?

c) mužov a žien spolu bolo 960?

d) detí bolo 125?

6. Andrej chová doma psov, škrečky a rybičky v pomere 2 : 3 : 6. Škrečkov je o dvoch viac ako psov. Koľko rybičiek má Andrej?

7. Pri pečení chleba je potrebné zmiešať tri druhy múky: špaldovú, pšeničnú a jačmennú. V akom pomere ich namiešame, ak špaldovej potrebujeme 250 g, pšeničnej 10 dag a jačmennej 150 g?

8. Alena, Tóno a Jana vyložili na stôl peniaze, ktoré mali vo vreckách.

a) Tóno mal 4-krát viac ako Alena. Jana mala 6-krát viac ako Alena. V akom pomere (v základnom tvare) sú jednotlivé sumy od každého z nich?

b) Tóno mal o 9 € viac ako Alena. Koľko eur mala Jana, ak mala dvakrát toľko ako Alena a všetci traja spolu vyložili na stôl 165 €? V akom pomere (v základnom tvare) sú sumy, ktoré vyložili na stôl Alena, Jana a Tóno?

MOCNINY A ODMOCNINY

Mocniny

$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots$

m–krát, $m \neq 0$

$a^0 = 1$

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$(a^m)^r = a^{m \cdot r}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Odmocniny

$\forall a > 0$

$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$

$\sqrt[m]{a^m} = a$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-1}$

$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Mocniny a vedecký zápis čísla

Mocniny čísla 10 a predpony

$10^1 = 10$ = desať ... deka

$10^2 = 100$ = sto ... hekto

$10^3 = 1\,000$ = tisíc ... kilo

$10^6 = 1\,000\,000$ = milión ... mega

$10^9 = 1\,000\,000\,000$ = miliarda ... giga

$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$ = bilión ... tera

$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$ = biliarda ... peta

$10^{18} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ = trilión

Mocniny čísla 10 a predpony

$10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ = desatina ... deci

$10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ = stotina ... centi

$10^{-3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$ = tisícina ... mili

$10^{-6} = \dfrac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$ = milióntina ... mikro

$10^{-9} = \dfrac{1}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000\,000\,001$ ... nano

Vedecký zápis čísla:

$\pm a \cdot 10^n$ pre $1 \leq a < 10$, kde $n \in Z$ ... $1\,879 = 1{,}879 \cdot 1\,000 = 1{,}879 \cdot 10^3$

Úprava výrazov

1. Zjednodušte výrazy.

a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$

b) $(2a^2b^3c)^4$

c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3$

d) $(u^{-2}v^3)^{-3}$

e) $\left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

f) $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$

g) $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$

h) $\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$

i) $(8r)^{\frac{1}{3}}(2r^{\frac{1}{2}})$

2. Zjednodušte výrazy.

a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{9x^{-4}y^6}$

d) $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$

e) $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}}\sqrt[5]{\frac{y^2}{4x^4}}$

f) $\sqrt[4]{81r^6s^8}$

Vedecký zápis čísla*

1. Koľko hodín má rok?

2. Vypočítajte, koľko odpadu vyprodukujú Američania v gramoch, ak jeden Američan vyprodukuje v priemere 75 000 g? (*Riešte s počtom 300 miliónov Američanov.*)

3. V roku 2008 bol štátny deficit 3 540 miliárd eur a v roku 2009 sa dlh zvýšil ešte o 0,79 biliónov eur. Aký bol celkový štátny deficit v roku 2009?

4. Oproti rovnakému obdobiu minulého roka vzrástli príjmy štátneho rozpočtu o 133,5 milióna eur na 5,094 miliardy eur. Výdavky sa naopak znížili o 281,6 milióna eur na 6,206 miliardy eur. Aký je medziročný rozdiel deficitu v štátnom rozpočte?

5. Malý priestor vnútri počítačového čipu tvaru kvádra je 0,000 002 56 m široký, 0,000 000 14 m dlhý a 0,000 275 m vysoký. Aký je jeho objem?

**Riešte nasledujúce úlohy s využitím vedeckého zápisu čísla.*

ČÍSELNÉ SÚSTAVY

Desiatková číselná sústava: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$1\,563 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Dvojková číselná sústava: {0, 1}

$(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = (13)_{10}$

$(13)_{10} = (1101)_2$

Číslo			Zvyšok
13	**: 2**	6	**1**
6	**: 2**	3	**0**
3	**: 2**	1	**1**
1	**: 2**	0	**1**

Osmičková číselná sústava: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$(7156)_8 = 7 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 7 \cdot 512 + 64 + 40 + 6 = (3694)_{10}$

$(3694)_{10} = (7156)_8$

Šestnástková (hexadecimálna) číselná sústava:

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15)}

$(91B8)_{16} = 9 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 9 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 =$

$= 9 \cdot 4\,096 + 256 + 176 + 8 = (37\,304)_{10}$

$(37\,304)_{10} = (91B8)_{16}$

Počtové operácie v dvojkovej sústave

Súčin: 1011 · 101 = 110111

		1	**0**	**1**	**1**
		·	**1**	**0**	**1**
		1	0	1	1
1	0	1	1	0	
1	0	2	1	1	1
		2 : 2 = 1/zv. 0			
	1	0			
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Súčet: 1101 + 101 = 10010

	1	**1**	**0**	**1**
	+	**1**	**0**	**1**
	1	2	0	2
		2 : 2 = 1/zv. 0	0	2 : 2 = 1/zv. 0
	1	**0**	**1**	**0**
	2	0	1	0
	2 : 2 = 1/zv. 0			
1	0	0	1	0

Prevody medzi sústavami s použitím Hornerovej schémy

$(110100)_2 \rightarrow (52)_{10}$

	1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2		2 · 1 = 2	2 · 3 = 6	12	26	52
	1	3	6	13	26	**52**

$(48C9)_{16} \rightarrow (18\,633)_{10}$

	4	8	C	9
	4	8	12	9
16		64	1 152	18 624
	4	72	1 164	**18 633**

$(67)_8 \rightarrow (55)_{10}$

	6	7
8		48
	6	**55**

Číselné sústavy

1. Zapíšte čísla od 0 do 20 dané v desiatkovej sústave ako čísla v dvojkovej sústave.

desiatková	dvojková	desiatková	dvojková	desiatková	dvojková
0		7		14	
1		8		15	
2		9		16	
3		10		17	
4		11		18	
5		12		19	
6		13		20	

2. Zapíšte číslo dané v dvojkovej sústave ako číslo v desiatkovej sústave.

a) $(11)_2 =$ __________

b) $(111)_2 =$ __________

c) $(1110)_2 =$ __________

d) $(01001)_2 =$ __________

e) $(11100110)_2 =$ __________

3. V nasledujúcich úlohách prepíšte číslo z dvojkovej sústavy do desiatkovej alebo naopak:

a) $(101)_2 =$ __________ b) $(11101)_2 =$ __________

c) $(100001)_2 =$ __________ d) $(1001011)_2 =$ __________

e) $(22)_{10} =$ __________ f) $(79)_{10} =$ __________

g) $(98)_{10} =$ __________ h) $(156)_{10} =$ __________

4. Vyriešte úlohy v dvojkovej sústave a riešenie overte v desiatkovej sústave.

a	b	a + b	a − b	a · b
101	10			
1101	101			
10110	110			
10011	1011			
111010	10101			

5. V nasledujúcich úlohách prepíšte číslo z osmičkovej sústavy do desiatkovej:

a) $(25)_8 =$ ______

b) $(74)_8 =$ ______

c) $(153)_8 =$ ______

d) $(1356)_8 =$ ______

6. V nasledujúcich úlohách prepíšte číslo z hexadecimálnej sústavy do desiatkovej:

a) $(25)_{16} =$ ______ b) $(7B)_{16} =$ ______

c) $(153)_{16} =$ ______ d) $(1B6)_{16} =$ ______

e) $(25A1)_{16} =$ ______

ALGEBRICKÉ VÝRAZY

koeficient 3

operátor $+, -, \cdot$

$3 \cdot x + y - 7$

premenná x, y

konštanta 7

Obor premennej je množina všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť za premennú.

Definičný obor výrazu je množina všetkých hodnôt premennej, pre ktoré má daný výraz zmysel (prípustné hodnoty premennej).

Zjednodušiť (upraviť) výraz

znamená nájsť výraz rovný danému výrazu v danom obore hodnôt:

$\frac{2x^3}{x^2} = \frac{2 \cdot x \cdot x^2}{x^2} = 2x, x \in R - \{0\}$

Rovnosť výrazov (ekvivalentné výrazy):

výrazy majú pre rovnaké hodnoty premennej rovnaké výsledné hodnoty:

$\frac{2x}{2} = x, x \in R$

Operácie s výrazmi

Vynímanie pred zátvorku (úprava na súčin)

$ab + bc = b(a + c)$

Súčet výrazov

$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$

Súčin výrazov

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Ekvivalentné výrazy

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Rozdiel výrazov

$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$

Podiel výrazov

$\frac{ab + bc}{b} = \frac{b(a + c)}{b} = a + c, b \neq 0$

Polynómy

Polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$; n je stupeň polynómu, ak $a_n \neq 0$

$P(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 5; Q(x) = x^3 + 3x + 1$

Koreň polynómu $P(x)$ je číslo a, pre ktoré $P(a) = 0$

Súčet polynómov:

$P(x) + Q(x) = (3x^4 + 2x^2 + x - 5) + (x^3 + 3x + 1) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 4$

Rozdiel polynómov:

$P(x) - Q(x) = (3x^4 + 2x^2 + x - 5) - (x^3 + 3x + 1) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 6$

Súčin polynómov:

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^4 + 2x^2 + x - 5) . (x^3 + 3x + 1) = 3x^7 + 9x^5 + 3x^4 + 2x^5 + 6x^3 + 2x^2 + x^4 + 3x^2 + x -$
$- 5x^3 - 15x - 5 = 3x^7 + 11x^5 + 4x^4 + x^3 + 5x^2 - 14x - 5$

Výrazy s jednou premennou

1. Vyjadrite výrazom.

a) päťnásobok dvojnásobku čísla x

b) o pätnásť viac ako štvornásobok čísla x

c) trojnásobok čísla x vydelený siedmimi

d) päťnásobok čísla x zmenšený o jedenásť

e) štvornásobok čísla x zväčšený o pätnásť

f) súčin čísla deväť a čísla x zmenšeného o 5

2. a) Vedúci prevádzky 1 000 € rozdelil rovným dielom medzi všetkých svojich pracovníkov. Vyjadrite výrazom pomocou premennej x, koľko eur dostal každý pracovník.

b) Učiteľ vytvoril v triede na hodine trojice. Vyjadrite výrazom pomocou premennej x, koľko je všetkých žiakov triedy, ak dnes päť žiakov chýba?

c) Andrej zarobí doručovaním tovaru v priebehu mesiaca 15 € za každú hodinu a kúpi naftu za 25 €. Vyjadrite výrazom pomocou premennej x výšku Andrejovho čistého mesačného zisku v eurách.

3. Vyjadrite výraz $3A(x) + 2B(x) - C(x)$, ak:

a) $A(x) = 6x^3 + 2x - 2$; $B(x) = 3x^2 - 2$; $C(x) = 12x^3 - x^2 - 6$

b) $A(x) = 5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x - 1$; $B(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 7$; $C(x) = 10x - 1$

4. Aký je rozdiel výrazov $A(x)$ a $B(x)$, ak:

$A(x) = 2x^2 - x + 3x^3 - 7$; $B(x) = x - 3x^3 + 12x^2 - 2x^4 + 5$

5. Aký algebrický výraz pripočítame k výrazu $B(x)$, aby sme dostali výraz $A(x)$?

a) $A(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$; $B(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$

b) $A(x, y, z) = (x + y - z)^2$; $B(x, y, z) = (x + y)^2 + z^2$

6. Nech pre výrazy A, B, C platí:

$A = 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$;
$B = a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4$;
$C = -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^3 + 10ab^3 - 5b^4$

Vyjadrite:

a) $A + B + C$

b) $A + B - C$

c) $A - B - C$

7. Zistite, či uvedené rovnosti platia:

a) $(2a - 3b)(2a + 3b) = 4(a - 1)^2 - 9b^2 + 8a - 4$

b) $(a - b + c)^2 = (b - a - c)^2$

c) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (bx - ay)^2$

d) $a^2 + b^2 = \dfrac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$

8. Upravte výrazy na súčin.

a) $2mp - 2mq =$

b) $2aby - 10acy + 8bcy$

c) $4 - 9x^2 =$

d) $25x^2 - 10ax + a^2 =$

e) $7x - 21 + 6b - 2bx =$

f) $r^3 - r^2 + r - 1 =$

g) $r^3 - 7r^2 - rs^2 + 7s^2 =$

h) $x^3 - x^2 - 4x + 4 =$

i) $4m^2k^4 - 49m^4k^2 =$

j) $9 - a^2 + 2ab - b^2 =$

k) $(3a - 1)^2 - (2b - 5)^2 =$

9. Zjednodušte výrazy.

a) $(x + y)x - (x - y)y - (x + y)y - (x - y)x =$

b) $a^2(b^2 - c^2) - b^2(c^2 + 1) + c^2(a^2 + b^2) + b^2(1 - a^2) =$

c) $4(x - y + z) - 2(x + y - z) - 3(-x - y - z) =$

d) $x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 - xy - y^2) - x(x^2 + 2y^2) =$

e) $4a(5b - 2a) - 4(7a^2 - 3ab) + 2a(3a - 3b) =$

f) $x^3(x + y^3) - (xy)^3 + (2x^2)^3 =$

g) $(a^2b^3)^2 + (2a^2)^2y^2 - (a^2y)^2 - a^4(b^6 + 1) =$

10. Vyjadrite najväčšieho spoločného deliteľa výrazov.

a) $2a^5b^3x^2$; $8a^4b^4x^2y^2$

NSD =

b) $a^2 + 2a + 1$; $a^2 - 1$

NSD =

c) $a^3b + 3a^2b$; $a^2b - 9b$

NSD =

d) $p^4 - 1$; $p^3 - p^2 + p - 1$

NSD =

e) $m^2 - n^2$; $(m - n)^2$; $m^2 - mn$

NSD =

f) $a^2 + 3a$; $a^2 - 9$; $(a^2 - 5a)(a + 3)$

NSD =

g) $x^2 - 4x + 3$; $x^2 - 2x - 3$

NSD =

h) $a^2 - a - 2$; $a^2 - 4$; $a^2 - 5a + 6$

NSD =

11. Vyjadrite najmenší spoločný násobok výrazov.

a) $a^5b^3x^4$ a $a^5b^4x^5$

NSN =

b) $abx + ab$; $ax^2 - a$ a $bx - b$

NSN =

c) $y^2 - y$; $y^3 + y^2$; $(y - 1)^2$ a $(y^2 - 1)^2$

NSN =

d) $p^2 - pq$; $p^2 - q^2$ a $px + qx$

NSN =

e) $x^2 + 3x + 2$; $x^2 - 2x - 3$

NSN =

12. Vyjadrite najmenší spoločný násobok a najväčšieho spoločného deliteľa výrazov.

a) $m - 1$; $m^2 - 1$; $m^2 - 2m + 1$

b) $x^2 - y^2$; $x^4 - y^4$; $x^6 - y^6$

c) $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^2 - 1$

d) $a(2a + 3b) - 3b(2a + 3b)$; $4a^2 + 12ab + 9b^2$

e) $a^3 + 4a^2b + 4ab^2$; $a^3 - 4ab^2$; $3a^3 + 6a^2b$

Lomené výrazy

1. Určte definičný obor výrazov.

a) $\dfrac{3x+7}{8}$

b) $\dfrac{3-x}{x+8}$

c) $\dfrac{x+1}{x^2-x}$

d) $\dfrac{5}{4a^2-1}$

2. Upravte lomené výrazy na základný tvar a určte, kedy majú zmysel.

a) $\dfrac{72abxy}{81abyz} =$

b) $\dfrac{39x^3y^4z}{65x^4y^3z} =$

c) $\dfrac{21a(a-b)}{14b(a-b)} =$

d) $\dfrac{9(a-b)(a-c)^2}{6(a-b)^3(a-c)} =$

e) $\dfrac{ac-bc}{ac+bc} =$

f) $\dfrac{4xy+2y^2}{2y^2} =$

g) $\dfrac{x^3-2x^2}{2x^3y^2-x^4y} =$

3. Chýbajúce časti zlomkov doplňte tak, aby sa výrazy rovnali.

a) $\dfrac{2ab}{c} = \dfrac{}{ac}$

b) $\dfrac{4xy^2}{5} = \dfrac{8x^3y^2}{}$

c) $\dfrac{2a}{a-b} = \dfrac{}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{x+3}{2(x+2)} = \dfrac{3(x^2+5x+6)}{}$

4. Sčítajte/odčítajte lomené výrazy a výsledok upravte na základný tvar.

a) $\dfrac{x-y}{2x-5y} - \dfrac{2y-x}{2x-5y} =$

b) $\dfrac{3}{a+b} + \dfrac{2}{a-b} - \dfrac{1}{a^2-b^2} =$

c) $\dfrac{2x-3}{x+2} - \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{1}{x} =$

d) $\dfrac{x}{3y} + \dfrac{3x}{4y} + \dfrac{x}{8y} =$

e) $\dfrac{4}{r-s} - \dfrac{1}{s-r} =$

f) $a - b - \dfrac{a^2-b^2}{a} =$

g) $\dfrac{3a+b}{a-b} - \dfrac{4b}{b-a} =$

h) $\dfrac{x}{y-1} - \dfrac{x}{2-2y} =$

i) $\dfrac{2x-y}{x^2+xy} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+y} =$

5. Vyriešte a výsledok upravte na základný tvar.

a) $\frac{14a^3x}{15b^4y} \cdot \frac{5b^3y}{7a^4x^2} =$

b) $\frac{8ab}{3c^2d^2} \cdot \left(-\frac{21c^4d^4}{32a^3b^3}\right) =$

c) $\frac{9xy}{5ab} \cdot \frac{3ab}{4yz} \cdot \frac{4bz}{3axy} =$

d) $\frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{3a^2b}{a^2 - 2ab} =$

e) $\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2} =$

f) $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - xy} \cdot \frac{x - y}{x^2 + 2xy} =$

g) $\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3} =$

Polynómy

1. Dané sú polynómy $P(x)$ a $Q(x)$. Nájdite súčet, rozdiel a súčin týchto polynómov.

a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 4$; $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 6$

b) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 1$; $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$

c) $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$; $Q(x)= x^4 + x^3 - 2x + 6$

2. Pomocou Hornerovej schémy zistite:

- podiel polynómu $P(x)$ a $Q(x) = (x - a)$,
- či číslo a je koreňom polynómu $P(x)$,
- aká je hodnota polynómu $P(x)$ v bode a.

a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 4$; $a = 2$

b) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 1$; $a = 3$

c) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2$; $a = -1$

d) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x + 6$; $a = -2$

Hornerova schéma

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 6$; $a = 3$

	2	−1	−3	6
3		$2 \cdot 3$	$5 \cdot 3$	$12 \cdot 3$
	2	5	12	42

Podiel polynómov

$(2x^3 - x^2 - 3x + 6) : (x - 3) = 2x^2 + 5x + 12$

$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 6 = 42$

$42 \neq 0 \Rightarrow$ číslo 3 nie je koreňom polynómu $2x^3 - x^2 - 3x + 6$

VÝROKOVÁ LOGIKA A DÔKAZY

Výrok

Výrok je **oznamovacia veta**, ktorá je pravdivá alebo nepravdivá.

Hypotéza je výrok, ktorého pravdivostná hodnota je neznáma.

Výrokom nie je:

- *otázka*
- *rozkazovacia veta*
- *nápis*
- *názov*

Pravdivostná hodnota výroku

pravda: 1

nepravda: 0

Zložený výrok

je vytvorený z jednoduchých výrokov pomocou spojok

a: ∧
Konjunkcia

alebo: ∨
Alternatíva (Disjunkcia)

ak... tak: ⇒
Implikácia

práve vtedy keď: ⇔
Ekvivalencia

Obmena implikácie
A ⇒ B: B' ⇒ A'

Obrátenie implikácie
A ⇒ B: B ⇒ A

Tabuľky pravdivostných hodnôt

Konjunkcia		
A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Alternatíva		
A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikácia			Obmena	Obrátenie
A	B	A ⇒ B	B' ⇒ A'	B ⇒ A
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

Ekvivalencia		
A	B	A ⇔ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Výroková forma $V(x)$ s premennou x

Oznamovacia veta obsahujúca premennú x,

sama nie je výrokom,

výrokom sa stáva, ak za premennú x dosadíme konkrétny objekt z vopred danej množiny (obor pravdivosti $V(x)$).

Kvantifikovaný výrok – výrok, ktorý obsahuje kvantifikátor

Všeobecný kvantifikátor: ∀
„pre všetky prvky",
„pre každý prvok",
„pre ľubovoľný prvok".

Existenčný (malý) kvantifikátor: ∃
„pre aspoň jeden prvok",
„existuje aspoň jeden prvok",
„pre niektorý prvok".

Pravdivostné hodnoty zložených výrokov

Kontradikcia: pravdivostná hodnota je vždy 0, bez ohľadu na pravdivosť jednotlivých výrokov.

Tautológia: pravdivostná hodnota je vždy 1, bez ohľadu na pravdivosť jednotlivých výrokov.

Negácia výroku

Výrok A', ktorý popiera pravdivosť tvrdenia vo výroku **A**

Ak pravdivostná hodnota výroku A je 1, tak pravdivostná hodnota jeho negácie A' je 0 a naopak.

$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$
$(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow (B \wedge A') \vee (A \wedge B')$

$(\forall\ x;\ V(x))' \Leftrightarrow (\exists\ x;\ V'(x))$
$(\exists\ x;\ V(x))' \Leftrightarrow (\forall\ x;\ V'(x))$

De Morganove pravidlá:
$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$
$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$

Výrok s udaním počtu prvkov a jeho negácia

V_1: Množina má aspoň k prvkov...
V_1': Množina má najviac $k - 1$ prvkov...

V_2: Množina má najviac k prvkov...
V_2': Množina má aspoň $k + 1$ prvkov...

Dôkazy

Priamy dôkaz
je založený na vlastnosti implikácie: „Ak platí výrok A a implikácia $A \Rightarrow B$, tak platí aj výrok B.“
$A \Rightarrow a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$

Nepriamy dôkaz
implikácie $A \Rightarrow B$ spočíva v priamom dôkaze jej obmeny $B' \Rightarrow A'$, ktorá je s ňou logicky ekvivalentná.
$B' \Rightarrow a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow \ldots \Rightarrow A'$

Dôkaz sporom
vychádza zo skutočnosti, že ak výrok A je pravdivý, tak jeho negácia A' je nepravdivá a naopak. Predpokladáme, že A' je pravdivý a postupným odvodením logických dôsledkov dôjdeme k výroku B, ktorý je nepravdivý:
$A' \Rightarrow a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$
Spor s predpokladom vedie k záveru – výrok A je pravdivý.

Dôkaz neplatnosti výroku protipríkladom
znamená, že uvedieme príklad, ktorý vyvráti platnosť výroku.

Jednoduchý výrok a jeho negácia

1. Určte, či nasledujúce vety sú výrokmi:

	ÁNO	NIE
a) Austrália je ostrov.	☐	☐
b) Cez Bratislavu preteká rieka Váh.	☐	☐
c) Aké charakterové vlastnosti má hlavná postava tejto knihy?	☐	☐
d) Nie, nemám rád jahody.	☐	☐
e) Prší.	☐	☐
f) Podaj mi pohár vody, prosím.	☐	☐
g) Najvyšší vrch Vysokých Tatier je Kriváň.	☐	☐
h) Pozor, padá omietka!	☐	☐

2. Nech P, Q, R a S sú nasledujúce výroky:

P: Toto auto je červené.

Q: V meste dnes nie sú tropické teploty.

R: Pri jazere dnes zamrzli chodníky.

S: Bratislava nie je hlavné mesto Slovenska.

Zapíšte nasledujúce výroky symbolicky:

a) Toto auto nie je červené. ______________________________

b) V meste sú dnes tropické teploty. ______________________________

c) Nie je pravda, že pri jazere dnes zamrzli chodníky. ______________________________

d) Bratislava je hlavné mesto Slovenska. ______________________________

3. Sformulujte a napíšte negáciu výrokov P – V s použitím kvantifikátorov.

P: Všetky ryby majú kosti. *Existuje ryba, ktorá* ______________________________

Q: Existuje kolobežka na elektrický pohon. ______________________________

R: Niektorí herci sú aj režisérmi. ______________________________

S: Žiadna žena nikdy nevstúpila do mešity. ______________________________

T: Aspoň traja členovia družstva dnes dali gól. ______________________________

U: Neexistujú modré ruže. ______________________________

V: Najviac 7 osôb sa môže odviezť výťahom. ______________________________

4. Vytvorte negáciu uvedených výrokov:

P: Priamky a, b sú na seba kolmé.

P': ______________________________

Q: Pre všetky reálne čísla a, b platí: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Q': ______________________________

R: Existujú reálne čísla a, b, pre ktoré neplatí $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

R': ______________________________

S: $5 \cdot 3 + 13 > 26$

S': ______________________________

T: Aspoň štyri čísla menšie ako 10 sú prvočísla.

T': ______________________________

U: Z 8 osôb vytvorím najviac päť rôznych trojčlenných družstiev.

U': ______________________________

V: Úloha má práve dve riešenia.

V': ______________________________

5. Negujte nasledujúce výroky:

a) $\forall\, x \in Z: x^3 \geq 0$ ______________________________

____

b) $\exists\, n \in N: 2^n > n$ ______________________________

____

c) $\forall\, x \in R: x^2 - 2 = 0$ ______________________________

____

d) $\exists\, x \in Z: x + \frac{1}{x} \geq 2$ ______________________________

____

e) $\forall\, \mathrm{x} \in R: 2x \geq \sqrt[3]{x}$ ______________________________

____

f) $\exists\, x \in R: x^2 + 2x + 1 = 0$ ______________________________

____

6. Kandidát na primátora sľúbil v rámci predvolebnej kampane obyvateľom, že dá upraviť všetky parky v meste. Po svojom zvolení však primátor tento sľub nesplnil. Vyberte z uvedených možností pravdivý výrok vyjadrujúci povolebnú skutočnosť:

A: Žiadny park nebol upravený.

B: Aspoň jeden park nebol upravený.

C: Najviac jeden park bol upravený.

D: Existuje park, ktorý bol upravený.

7. Triedny učiteľ na triednickej hodine povedal: „Každý žiak I. D triedy vymeškal v prvom polroku aspoň 25 vyučovacích hodín." Neskôr sa toto tvrdenie ukázalo ako nepravdivé. Z toho vyplýva, že v prvom polroku

A: Všetci žiaci I. D triedy vymeškali menej ako 25 vyučovacích hodín.

B: Aspoň jeden žiak z I. D triedy vymeškal najviac 24 vyučovacích hodín.

C: Žiaden žiak I. D triedy nevymeškal viac ako 24 vyučovacích hodín.

D: Niektorí žiaci I. D triedy vymeškali viac ako 25 vyučovacích hodín.

8. Pomocou premennej a kvantifikátorov zapíšte nasledujúce výroky:

a) Druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná.

b) Existuje prirodzené číslo, ktoré je koreňom rovnice $x^2 - 9 = 0$.

c) Existuje reálne číslo x, ktorého tretia mocnina je rovná -5.

d) Každé reálne číslo x je väčšie ako jeho prevrátená hodnota.

e) Existuje aspoň jedno reálne číslo x, ktorého prevrátená hodnota je väčšia ako 10.

Zložené výroky a ich negácia

1. Vyslovte negáciu výrokov A – J.

A: Zajtra bude snežiť a teploty nepresiahnu 0 °C.

B: Na večeru si dám chlieb a maslo.

C: Po obede si objednám čaj alebo kávu.

D: Kúpim si kolobežku alebo bicykel.

E: Ak chce vodič odbočiť, dáva znamenie o zmene smeru jazdy.

F: Slivky kúpim iba vtedy, keď nebudú jablká.

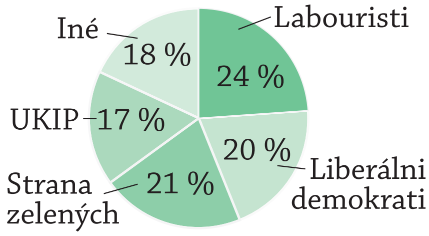
G: Daná rovnica má aspoň jeden kladný alebo záporný koreň.

H: Číslo 50 nie je deliteľné 15 alebo nie je deliteľné 5.

I: Ak daná rovnica má jeden dvojnásobný koreň, potom má aspoň jeden ďalší koreň.

J: Jana príde práve vtedy, keď príde Ivana.

2. Využite informácie z kruhového grafu a rozhodnite, či zložené výroky týkajúce sa zloženia politického systému Veľkej Británie sú pravdivé:



a) 17 % všetkých politikov je volených z radov UIKP a 20 % z radov strany Liberálni demokrati.
PRAVDA/NEPRAVDA

b) 24 % zvolených zástupcov je zo strany Liberálni demokrati alebo 17 % je zo strany UIKP.
PRAVDA/NEPRAVDA

c) Ak je v parlamente 20 % liberálnych demokratov, tak je v ňom zastúpených 21 % labouristov.
PRAVDA/NEPRAVDA

d) V parlamente je viac ako 18 % zástupcov zo strany UIKP práve vtedy a len vtedy, ak liberálnych demokratov je menej ako 18 %. *PRAVDA/NEPRAVDA*

e) Ak 24 % všetkých politikov v parlamente tvoria labouristi a 17 % tvoria reprezentanti Strany zelených, tak percento reprezentantov strany UIKP neprevyšuje percento liberálnych demokratov. *PRAVDA/NEPRAVDA*

Kontradikcie a tautológie

1. Zistite, či niektorá z nasledujúcich výrokových foriem je tautológia alebo kontradikcia. Použite tabuľku pravdivostných hodnôt.

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$

b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A' \vee B')$

c) $(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$

d) $(A \Rightarrow A') \Leftrightarrow (A' \Rightarrow A)$

A	B	A'	B'	K	L	K⇔L	M	N	M'	M⇔N	M'⇔N
				A⇒B	A'∨B		A∧B	A'∨B'			
0	0										
0	1										
1	0										
1	1										

2. Ukážte, že nasledujúce výrokové formy sú tautológie.

a) $[(A \Rightarrow B) \wedge A'] \vee (B \Rightarrow A)$

b) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y')]$

c) $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

d) $[(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$

3. **Návšteva kina**

Peter a Karol čakajú pred kinom na svojich spolužiakov Adama, Borisa a Cyrila. Peter tvrdí: „Ak príde Adam a Boris, tak príde aj Cyril.“ Karol hovorí: „Ja si myslím, že ak príde Adam a nepríde Cyril, tak nepríde ani Boris.“ Na to vraví Peter: „To ale tvrdíš to isté ako ja.“ Rozhodnite, či skutočne obaja hovoria to isté. Pri riešení použite tabuľku pravdivostných hodnôt.

Výrok A: *Adam príde.* __________ Výrok P: __________

Výrok B: __________ Výrok K: __________

Výrok C: __________

A	B	C										
0	0	0										
0	0	1										
0	1	0										
0	1	1										
1	0	0										
1	0	1										
1	1	0										
1	1	1										

4. **Čerpacie stanice**

Pre prevádzkovú dobu troch čerpacích staníc A, B, C platia nasledujúce podmienky:

- Vždy je v prevádzke čerpacia stanica A alebo C.
- Stanica C je uzavretá, práve keď je otvorená stanica A.
- Ak je otvorená stanica C, tak stanica A je uzavretá a v prevádzke je stanica B.

Určte všetky možnosti prevádzky čerpacích staníc.


Tu môžete
riešiť úlohy
s tabuľkami
pravdivostných
hodnôt.

Obmena a obrátenie implikácie

1. Napíšte obmeny a obrátenia nasledujúcich implikácií:

A: Ak sa vodič cíti unavený, urobí si prestávku.

Obmena:

Obrátenie:

B: Ak nemám zvýšenú teplotu, neliečim sa.

Obmena:

Obrátenie:

C: Pre každé prirodzené číslo n platí: ak je n^2 párne, potom aj n je párne.

Obmena:

Obrátenie:

D: Ak je číslo deliteľné deviatimi, tak je deliteľné aj tromi.

Obmena:

Obrátenie:

E: Ak je trojuholník ABC rovnostranný, tak všetky tri jeho strany majú rovnakú veľkosť.

Obmena:

Obrátenie:

2. Napíšte negáciu, obmenu a obrátenie nasledujúcich implikácií. Ak sa dá, určte aj ich pravdivostnú hodnotu.

A: Ak je číslo deliteľné ôsmimi, tak je párne.

Negácia:

Obmena:

Obrátenie:

B: Ak je konvexný štvoruholník kosoštvorec, potom sú jeho uhlopriečky navzájom kolmé.

Negácia:

Obmena:

Obrátenie:

C: Ak je druhá mocnina reálneho čísla väčšia ako 5, potom je aj dané číslo väčšie ako 5.

Negácia:

Obmena:

Obrátenie:

D: Ak má štvoruholník aspoň tri strany rovnako dlhé a jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, tak je to kosoštvorec alebo štvorec.

Negácia:

Obmena:

Obrátenie:

Protipríklad

1. Pomocou protipríkladu dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú nepravdivé:

a) Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x platí nerovnosť $x^3 > x^2$.

b) Ak je prirodzené číslo deliteľné nejakým prvočíslom, tak je toto číslo zložené.

c) Celé číslo, ktoré je deliteľné 10 a 15, je deliteľné 150.

d) Hodnoty polynómu $P(x) = x^2 + 3x + 2$ sú nezáporné pre ľubovoľné reálne číslo x.

e) Ak je y prevrátené číslo k reálnemu číslu x, tak $0 < y \leq 1$.

f) Číslo $3^n + 2$ je prvočíslo pre všetky prirodzené hodnoty n.

g) Pre všetky čísla $x \geq 1$ platí: $x + \frac{1}{x} \geq 3$.

h) Pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí: $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$.

i) Číslo $n^2 + n + 1$ je prvočíslo pre všetky prirodzené čísla n.

Priamy dôkaz

1. Dokážte, že druhá mocnina ľubovoľného nepárneho čísla je opäť nepárne číslo.

2. Ak sú čísla a, b nepárne, tak aj číslo $a^2 + b + 1$ je nepárne. Dokážte.

3. Pre všetky prirodzené čísla n dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) $3|n \Rightarrow 6|(n^2 - n)$

b) $5|n \Rightarrow 30|(n^3 - n)$

c) $3|(n - 1) \Rightarrow 9|(n^2 + 4n - 5)$

d) Ak 2 nedelí n, tak $8|(n^4 - 1)$.

4. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

a) $\forall\, a, b, c : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

b) $\forall\, a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$

c) $\forall\, x \neq 0 : x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

d) $\forall\, x > 0, y > 0 : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

5. Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí nerovnosť $\frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}$.

6. Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Nepriamy dôkaz

1. Pre všetky prirodzené čísla n dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) $2|n^2 \Rightarrow 2|n$

b) Ak 2 nedelí n^3, tak 4 nedelí n.

c) Ak $3|(n^2 + 1)$, tak 6 nedelí n.

d) Ak $n^3 - 6n^2 + 2n - 10$ je nepárne číslo, tak aj n je nepárne číslo.

e) Ak výraz $a^4 + 2$ nie je deliteľný číslom 3, potom číslo a je deliteľné 3.

Dôkaz sporom

1. Ak je druhá mocnina celého čísla nepárne číslo, potom aj toto číslo je nepárne. Dokážte.

2. Každým bodom roviny možno na danú priamku viesť najviac jednu kolmicu. Dokážte.

3. Daná je kružnica $k(S, SA)$. Dokážte, že kolmica zostrojená v bode A na polomer SA nepretne v ďalšom bode kružnicu $k(S; SA)$.

4. Dokážte, že pre každú dvojicu reálnych čísel a, b platí nerovnosť $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

ROVNICE A NEROVNICE

Lineárne rovnice a nerovnice

Ekvivalentné úpravy lineárnych rovníc:

- pripočítanie alebo odpočítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám rovnice,
- vynásobenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom,
- výmena ľavej a pravej strany rovnice.

Ekvivalentné úpravy lineárnych nerovníc:

- pripočítanie alebo odpočítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám nerovnice,
- vynásobenie oboch strán nerovnice tým istým kladným číslom.

Úpravy, ktoré môžu zmeniť počet riešení rovnice:

- umocňovanie alebo odmocňovanie oboch strán rovnice,
- vynásobenie alebo vydelenie oboch strán rovnice výrazom obsahujúcim premennú.

Sústava dvoch lineárnych rovníc

Porovnávacia metóda

$$\begin{array}{lcl} 2x - 5y = 7 & \longrightarrow & x = \dfrac{7+5y}{2} \\ x - 3y = 5 & \longrightarrow & x = 5 + 3y \\ \hline \dfrac{7+5y}{2} = 5 + 3y & & /\cdot 2 \\ 7 + 5y = 10 + 6y & & \\ \hline \mathbf{y = -3} & \longrightarrow & x = 5 + 3(-3) \\ & & \boldsymbol{x = -4} \end{array}$$

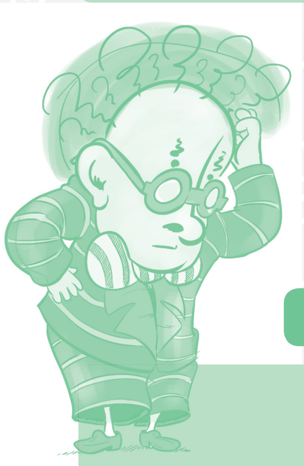
Dosadzovacia (substitučná) metóda

$$\begin{array}{lcl} 2x - 5y = 7 & & \\ x - 3y = 5 & \longrightarrow & x = 5 + 3y \\ \hline 2(5+3y) - 5y = 7 & & \\ 10 + 6y - 5y = 7 & & \\ \hline \mathbf{y = -3} & \longrightarrow & x = 5 + 3(-3) \\ & & \boldsymbol{x = -4} \end{array}$$

Sčítacia metóda

$$\begin{array}{lcl} 2x - 5y = 7 & & \\ x - 3y = 5 & \longrightarrow & /\cdot(-2) \\ \hline 2x - 5y = 7 & & \\ -2x + 6y = -10 & & \\ \hline \mathbf{y = -3} & \longrightarrow & 2x - 5y = 7 \\ & & 2x - 5(-3) = 7 \\ & & \boldsymbol{x = -4} \end{array}$$

$$\boldsymbol{K = \{[-4, -3]\}}$$



Lineárne rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou

$\mathbf{5x - |3x - 6| = 4}$ $\qquad$ $\mathbf{5x - |3x - 6| \geq 4}$

Nulový bod výrazu v absolútnej hodnote: $x = 2$, $(3x - 6 = 0)$

	$\mathbf{\lvert 3x-6\rvert}$	**Riešenie rovnice**	**Riešenie nerovnice**
$(-\infty, 2)$	$(6 - 3x)$	$5x - (6 - 3x) = 4$	$5x - (6 - 3x) \geq 4$
		$x = \frac{5}{4} \in (-\infty, 2)$; $K = \left\{\frac{5}{4}\right\}$	$x \geq \frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left\langle\frac{5}{4}, \infty\right)$ $K = \left\langle\frac{5}{4}, 2\right)$
$\langle 2, \infty)$	$(3x - 6)$	$5x - (3x - 6) = 4$	$5x - (3x - 6) \geq 4$
		$x = -1$	$x \geq -1 \Rightarrow x \in \langle -1, \infty)$
		$-1 \notin \langle 2, \infty)$, $K = \emptyset$	$K = \langle -1, \infty) \cap \langle 2, \infty)$, $K = \langle 2, \infty)$
Riešenie		$K = \left\{\frac{5}{4}\right\}$	$K = \left\langle\frac{5}{4}, \infty\right)$

Kvadratické rovnice

Doplnenie do štvorca

$$x^2 - 3x = 10$$

$$x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$x_1 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \qquad x_2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 5} \qquad \boldsymbol{x_2 = -2}$$

K = {−2, 5}

Rozklad na koreňové činitele

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -b;\ x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = 3;\ x_1 \cdot x_2 = -10$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$(x + 2) \cdot (x - 5) = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = -2;\ x_2 = 5}$$

K = {−2, 5}

Vzorec

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$D \text{ (diskriminant)} = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 5} \qquad \boldsymbol{x_2 = -2}$$

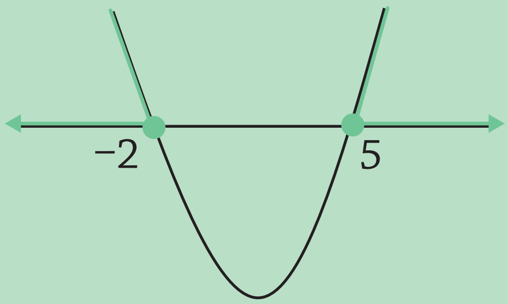
K = {−2, 5}

Kvadratické nerovnice

Grafické riešenie

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

1. Korene kvadratickej rovnice
   $x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -2;\ x_2 = 5}$
2. Riešenie kvadratickej nerovnice
   $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, \infty)$



Rovnice a nerovnice v súčinovom a podielovom tvare

$\boldsymbol{(x-4)(x+5) = 0}$	$\boldsymbol{\frac{x-4}{x+5} = 0}$	$\boldsymbol{(x-4)(x+5) \geq 0}$				$\boldsymbol{\frac{x-4}{x+5} \geq 0}$		
Nulové body: $(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 4$, $(x+5) = 0 \Rightarrow x_2 = -5$								
$(x-4) = 0$	$(x-4) = 0$		$(x-4)$	$(x+5)$	Súčin	$(x-4)$	$(x+5)$	Podiel
alebo	a	$(-\infty, -5)$	−	−	+	−	−	+
$(x+5) = 0$	$(x+5) \neq 0$	$(-5, 4)$	−	+	−	−	+	−
		$(4, \infty)$	+	+	+	+	+	+
$\boldsymbol{x_1 = 4;\ x_2 = -5}$	$\boldsymbol{x = 4}$	$x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 4, \infty)$				$x \in (-\infty, -5) \cup \langle 4, \infty)$		

Lineárne rovnice a nerovnice

1. Riešte rovnice v množine reálnych čísel. Ak je potrebné, urobte skúšku správnosti.

a) $9(x - 4) - 5x = x - 12$

b) $3x - 7(x - 5) = 2x - 13$

c) $6x - 5(4x - 2) = 14 - 6x$

d) $(3y - 7)(9 + 4y) = (6y - 1)(5 + 2y)$

e) $8x - 4(3x - 4) = 15 - 4x$

f) $6 - 5[8 - 2(3x - 1)] = -6(4 + 5x)$

g) $0{,}2(1 - x) = 0{,}6(3 + x)$

h) $\frac{2}{3}(6 - y) + 2 - y = 1$

i) $\frac{4}{5}(7 - 3y) - 6 + y = 1$

j) $\frac{2}{3}\left(3 - \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{6}(6 - s)$

2. Riešte rovnice v množine reálnych čísel.

a) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}x = \frac{5}{6}x + 5{,}5$

b) $4\frac{3}{8}x - 5\frac{1}{6}x = \frac{2}{3}\left(15 - \frac{x}{4}\right)$

c) $\frac{x}{2} - \frac{3}{5}x = \frac{1}{4}(x - 7)$

d) $\frac{x-5}{4} = \frac{x-3}{2}$

3. Riešte rovnice v množine reálnych čísel a urobte skúšku správnosti.

a) $\frac{t-7}{9} = \frac{t-2}{6}$

b) $\frac{6+7s}{3} - \frac{5s-3}{6} = 2 - \frac{s+3}{2}$

c) $\frac{y+3}{4} - \frac{y-5}{3} = 2$

d) $\frac{1-3u}{2} + \frac{2u-3}{4} = \frac{5-u}{6} - \frac{4u-8}{3}$

4. Určte podmienky riešiteľnosti rovníc a vyriešte ich v množine reálnych čísel.

a) $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{x+1}$

b) $\frac{x^2-1}{x+1} = -2$

c) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x+1}$

d) $\frac{5(x-1)}{-5x+5} = -1$

e) $\frac{21}{x-3} = 7$

f) $\frac{2x-6}{x^2-9} = 1$

g) $\frac{4x-5}{2x-3} = 2$

h) $\frac{6x-4}{9x-6} = x$

5. Riešte lineárne nerovnice v množine reálnych čísel.

a) $3(x-1) \leq 2x + 2(x+1)$

b) $10(x-1) - 5(x+1) > 2(x+3)$

c) $4(x+1) - (x-1) \geq 4(x-1)$

d) $2x < 2x + 3 - 3(x+1)$

e) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+2}{8} - \frac{x-1}{6} \geq 1$

f) $\frac{2x+1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{6x-1}{12}$

6. Riešte v R sústavy lineárnych rovníc.

a) $x - 2y = -9$
$x + 3y = 16$

b) $12x - 3y = 6$
$4x - y = 2$

c) $y = 36 - 9x$
$3x + \frac{y}{3} = 12$

d) $7x + 2y = 16$
$-21x - 6y = 24$

7. Riešte v R lineárne nerovnice s absolútnou hodnotou.

a) $|3x + 15| = 5x - 5$

b) $|4x - 2| + 4 = 0$

c) $7 - 4x = |4x - 7|$

d) $x + |2 - 3x| = 4$

e) $|x + 2| + |x - 1| = 3$

f) $|x - 1| - |x - 2| = 1$

8. Riešte v R lineárne nerovnice s absolútnou hodnotou.

a) $|x + 2| + 1 > x$

b) $|2x - 8| < 3x - 12$

c) $|x| \geq |x - 1|$

d) $|3x + 1| - |x - 2| + 1 > 0$

Kvadratické rovnice a nerovnice

1. Riešte v R kvadratické rovnice.

a) $x^2 + 2x - 2 = 0$

b) $8x - 3x^2 = 0$

c) $6x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $x^2 + 10x + 21 = 0$

e) $2x^2 - 9 = 0$

f) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

2. Riešte v R kvadratické nerovnice.

a) $6x^2 - 3x + 2 > 0$

b) $x^2 + 10x + 21 < 0$

c) $7 - 2x^2 + 5x < 0$

d) $4x^2 - 6x + 15 \leq 0$

e) $4x^2 - 9 \geq 0$

f) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

Slovné úlohy

1. Aritmetický priemer výsledkov testov, ktoré napísali Ján, Marek a Tereza, je 80 %. Na koľko percent napísala test Tereza, ak Ján napísal test na 64 % a Marek na 78 %?

2. Priemerný obrat firmy za posledný polrok bol 76 % plánovaného polročného obratu. Aký bol obrat za prvý mesiac, ak v ďalších mesiacoch to bolo postupne 72 %, 83 %, 65 %, 73 % a 92 % plánovaného mesačného obratu?

3. Všetko oblečenie v obchode zlacnelo o 20 %. Koľko stála sukňa pred zlacnením, ak po zlacnení bola jej cena 28 €?

4. Na premiére filmu sa zúčastnilo 600 divákov. Lístok pre dospelého diváka stál 9 € a lístok pre dieťa stál 6 €. Koľko detí navštívilo premiéru, ak v pokladni mali celkovú sumu za lístky 4 800 €?

5. Klientovi vystavili účet na 580 € za objednanú notársku službu. Ak asistent notára pracoval o 5 hodín menej ako notár, koľko hodín pracoval podľa vystaveného účtu každý z nich?

CENNÍK SLUŽIEB	
Notár	60 €/h
Asistent notára	20 €/h

6. Dvaja chlapci stoja oproti sebe vo vzdialenosti 224 m. V tom istom okamihu sa vydajú jeden druhému naproti. Aleš sa pohybuje rýchlosťou 2 m/s a Roman rýchlosťou 1,5 m/s.

a) Za aký čas od štartu sa stretnú?

b) Koľko prejde Aleš a koľko Roman, kým sa stretnú?

7. Tomáš pádluje na kajaku konštantnou rýchlosťou 5 km/h. Keď pádluje proti prúdu, trvá mu jazda do cieľa 15 minút. Keď pádluje po prúde, trvá mu cesta späť k miestu, odkiaľ vyštartoval, 12 minút.

a) Aká je rýchlosť prúdu vody?

b) Zisti, akú dlhú dráhu Tomáš prešiel.

8. Tržbu z potravín vo výške 14 600 € odovzdali do banky v 100- a 50-eurových bankovkách. Koľko bolo ktorých, ak všetkých bankoviek bolo spolu 220?

9. Na detskom dopravnom ihrisku stoja bicykle a trojkolky. Spolu je tam 62 kolies a 27 sedadiel. Koľko je na ihrisku bicyklov a koľko trojkoliek?

10. Na babkinej farme sú husi, kačky a ovce. Spolu majú 132 nôh a 51 hláv. Koľko oviec, husí a kačiek je na farme, ak vieme, že husí a kačiek je rovnaký počet?

11. V športovej hale je 290 ľudí. Mužov je trikrát viac ako žien a detí je o 18 viac ako dospelých. Koľko je v hale mužov, žien a detí?

12. Koľko chlapcov súťažilo, ak štvrtina súťažiacich bola v cieli pred Jankom a dve tretiny za ním?

13. V pravouhlom trojuholníku je jedna odvesna o 14 cm kratšia ako druhá a prepona meria 26 cm. Vypočítajte obvod a obsah tohto trojuholníka.

14. Štvorcová a obdĺžniková záhrada majú rovnaký obsah. Dĺžka obdĺžnikovej záhrady je o 5 metrov väčšia ako dvojnásobok dĺžky strany štvorcovej záhrady. Šírka obdĺžnikovej záhrady je o 6 metrov kratšia ako dĺžka strany štorcovej záhrady. Vypočítajte dĺžku strany štvorcovej záhrady.

15. Ciferný súčet dvojciferného čísla je 7. Keď vymeníme poradie číslic v tomto čísle, dostaneme číslo o 27 väčšie, ako bolo pôvodné číslo. Nájdite toto číslo.

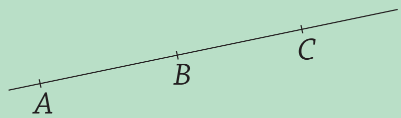
16. Firma vykonávajúca terénne úpravy realizovala objednávky na úpravu záhrad v dvoch materských školách. Do prvej z nich nasadili 13 kríkov a 4 stromy a vystavili účet na 487 eur. V druhej materskej škole zasadili 6 kríkov a 2 stromy a vystavili účet na 232 eur. Koľko si firma zaúčtovala za 1 strom a 1 krík? (Práca bola vyúčtovaná inou faktúrou.)

PLANIMETRIA

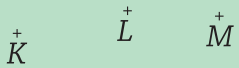
Bod

Označenie:
– veľké tlačené písmeno: A, B, C,...
– bod v súradnicovej sústave $A[x, y]$

Kolineárne body A, B, C



Nekolineárne body K, L, M



Priamka a jej časti

Označenie:
– malé písmeno: t, p,...
– body, ktorými je určená: $t = \overleftrightarrow{AB}$

Každý bod priamky ju rozdelí na dve navzájom opačné **polpriamky**.

Časť priamky ohraničená dvomi bodmi je **úsečka** AB.

Prienik polpriamok $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ je úsečka AB.

Vzájomná poloha dvoch priamok

Totožné: každý bod jednej priamky je súčasne bodom druhej priamky. $a = b$

Rovnobežné: nemajú spoločný bod a ležia v jednej rovine. $a \parallel b$

Rôznobežné: majú práve jeden spoločný bod a ležia v jednej rovine. $a \cap b = \{P\}$

Množiny bodov danej vlastnosti

Kružnica $k(S, r)$ je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od daného bodu S rovnakú vzdialenosť r (S – stred kružnice, r – polomer kružnice, $2r = d$ – priemer kružnice).

Kruh $k(S, r)$ je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť rovnakú alebo menšiu, ako je daná vzdialenosť r.

Rovinný pás šírky $2d$ je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od danej priamky v rovine vzdialenosť rovnakú alebo menšiu, ako je daná vzdialenosť d.

Os úsečky je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od krajných bodov úsečky rovnakú vzdialenosť.

Os konvexného uhla *AVB* je množina všetkých bodov X v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od ramien uhla $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ a zároveň sú bodmi daného konvexného uhla AVB.

Rovina

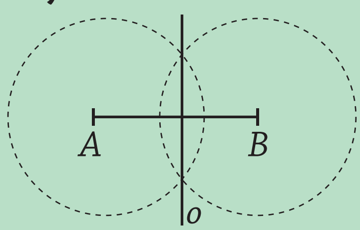
Označenie:
– písmeno gréckej abecedy: α, β, γ,...
– body, ktorými je určená: napr. $\overleftrightarrow{ABC}$

Daná:
– 3 nekolineárnymi bodmi
– 2 rovnobežnými priamkami
– 2 rôznobežnými priamkami
– priamkou a bodom, ktorý na nej neleží

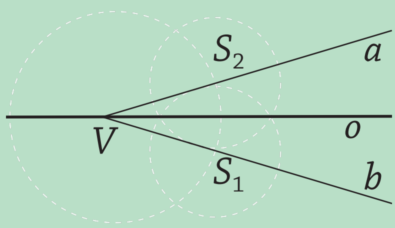
Každá priamka rozdelí rovinu na 2 **polroviny**.

Osi

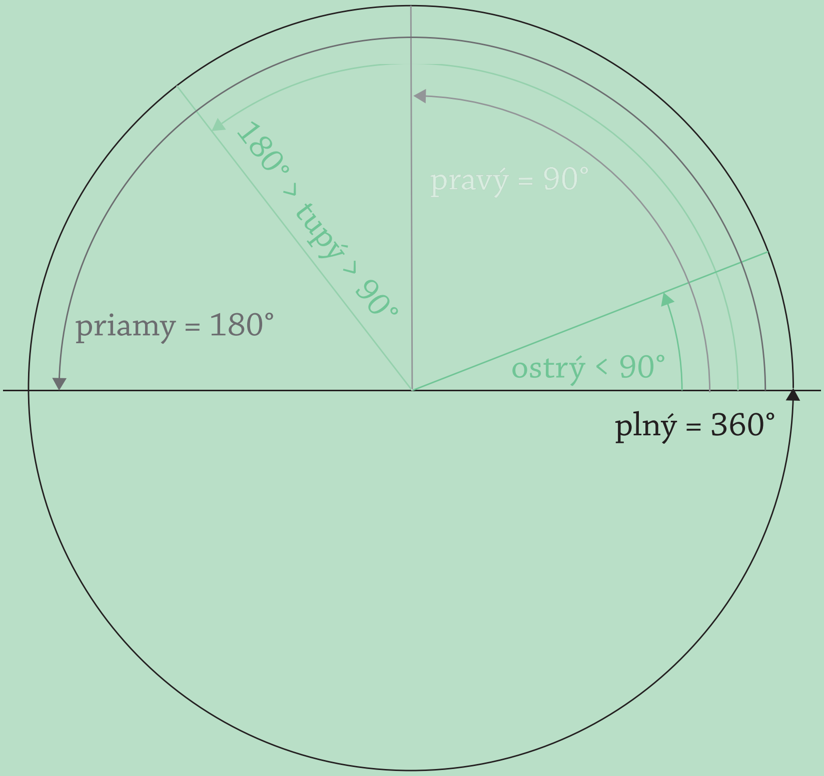
Os úsečky



Os uhla

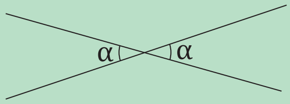


Uhly

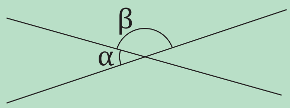


Dvojice uhlov

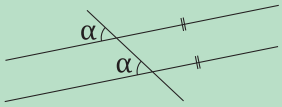
Vrcholové



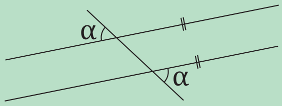
Susedné

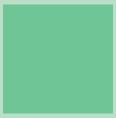


Súhlasné



Striedavé



Rovinné útvary					
		Tvar	**Strany**	**Obvod**	**Obsah**
n - uholníky	**Trojuholník**		a, b, c	$o = a + b + c$; $s = \frac{o}{2}$	$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$ $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
	Štvorec		a	$o = 4a$	$S = a^2$
	Obdĺžnik		a, b	$o = 2\,(a + b)$	$S = a \cdot b$
	Kosoštvorec		a	$o = 4a$	$S = a \cdot v_a$
	Kosodĺžnik		a, b	$o = 2\,(a + b)$	$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$
	Lichobežník		a, b, c, d	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$
Kružnica a kruh			polomer r priemer $d = 2r$	$o = 2\pi r = \pi d$	$S = \pi r^2$

Pravouhlý trojuholník

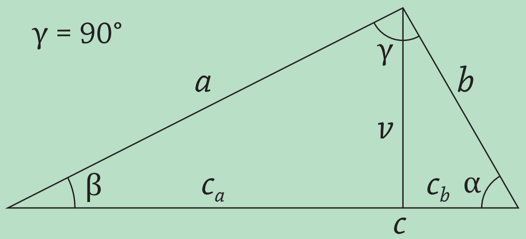
Pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$

Euklidove vety:

– o výške: $v^2 = c_a \cdot c_b$

– o odvesnách: $a^2 = c \cdot c_a$; $b^2 = c \cdot c_b$

$\gamma = 90°$



Trigonometria:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$

$\sin \beta = \cos \alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$

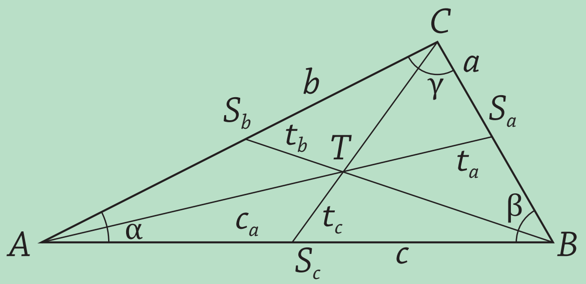
$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$

Všeobecný trojuholník

Stredy strán trojuholníka: S_a, S_b, S_c

Ťažnice v trojuholníku: t_a, t_b, t_c

Ťažisko trojuholníka: T



Stredné priečky trojuholníka: S_aS_b, S_aS_c, S_cS_b

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

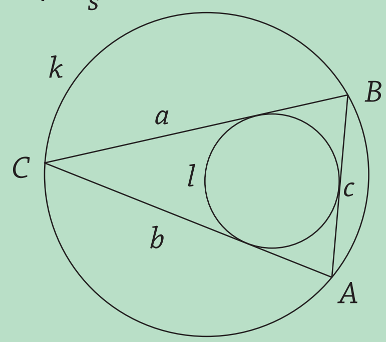
Sínusová veta: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$

Kružnica k **opísaná** trojuholníku

– polomer $r = \frac{abc}{4S}$

Kružnica l **vpísaná** do trojuholníka

– polomer $\rho = \frac{S}{s}$

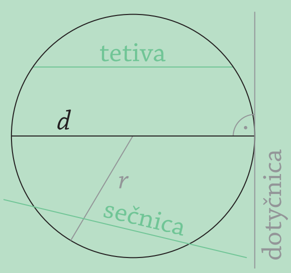


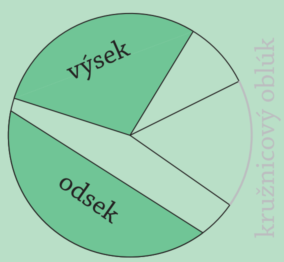
Kosínusová veta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

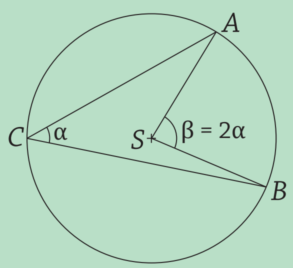
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

Kruh a kružnica



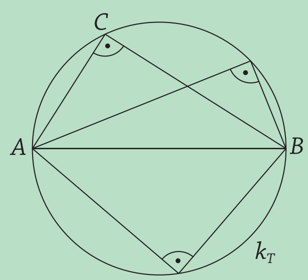




α ... obvodový uhol

β ... stredový uhol

Tálesova kružnica



Planimetria

1. V rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky *a* určte veľkosť výšky.

2. Vo štvorci so stranou dĺžky *a* určte veľkosť uhlopriečky.

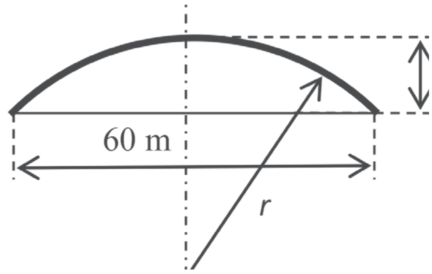
3. V obdĺžniku so stranami *a*, *b* vypočítajte dĺžku uhlopriečky ak viete, že:

a) dĺžka jednej jeho strany je dvojnásobkom dĺžky druhej strany,

b) jedna jeho strana je o 3 cm dlhšia ako druhá strana.

4. Vypočítajte polomer kružnice, v ktorej tetiva vzdialená 8 cm od stredu kružnice je o 13 cm dlhšia ako polomer tejto kružnice.

5. Mostný kruhový oblúk na obrázku má rozpätie 60 m a výšku 5 m. Vypočítajte polomer oblúka r.



6. Dve rovnobežné tetivy v kružnici s polomerom 6 cm majú dĺžky 6 cm a 10 cm. Vypočítajte ich vzájomnú vzdialenosť.

7. Vypočítajte obvod rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou 20 cm, ktorého obsah je 240 cm^2.

8. Vypočítajte dĺžku základne a ramena rovnoramenného trojuholníka, ak jeho rameno je o 1 cm dlhšie ako základňa a o 2 cm dlhšie ako výška na základňu.

9. V rovnoramennom trojuholníku ABC s ramenami AC a BC je c = 24 cm a v_c = 15 cm. Vypočítajte dĺžku ťažnice t_a.

10. V pravouhlom trojuholníku s preponou c má strana a dĺžku 4 cm a ťažnica na túto stranu má dĺžku 6 cm. Vypočítajte dĺžku ťažnice t_b na stranu b trojuholníka.

11. V rovnoramennom lichobežníku sú dĺžky základní 15 cm a 9 cm. Uhlopriečky majú dĺžku 13 cm. Vypočítajte obvod a obsah lichobežníka.

12. Základne rovnoramenného lichobežníka majú dĺžky 36 cm a 26 cm, ramená majú dĺžku 13 cm. Vypočítajte dĺžku jeho výšky a uhlopriečky.

13. Vypočítajte obsah rovnoramenného lichobežníka, ktorého základne majú dĺžky $a = 22$ cm a $c = 12$ cm, ak je jeho výška o 1 cm kratšia ako dĺžka ramena.

14. Obsah kosoštvorca je 75 cm^2, jeho uhlopriečky majú dĺžky v pomere 3 : 2. Vypočítajte dĺžky jeho uhlopriečok.

15. Ukážte, že v rovnobežníku *ABCD* platí medzi uhlopriečkami e, f a stranami a, b vzťah $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

16. Vypočítajte obsah obdĺžnika, ak dĺžka jednej jeho strany $a = 84$ cm a dĺžka uhlopriečky je o 72 cm väčšia ako dĺžka jeho druhej strany.

17. Vypočítajte obsah pravouhlého lichobežníka *ABCD*, ak jeho základne majú dĺžku $|AB| = 66$ cm a $|CD| = 18$ cm a jeho kolmé rameno je o 36 cm kratšie ako druhé rameno.

18. Jedna odvesna pravouhlého trojuholníka ABC má dĺžku $a = 14$ cm a polomer kružnice vpísanej do tohto trojuholníka je $r = 5$ cm. Vypočítajte dĺžku prepony a jeho druhej odvesny.

19. Dĺžky strán AB a AD obdĺžnika $ABCD$ sú v pomere 3 : 4. Kružnica k s priemerom 10 cm je opísaná tomuto obdĺžniku. Vypočítajte dĺžky strán daného obdĺžnika.

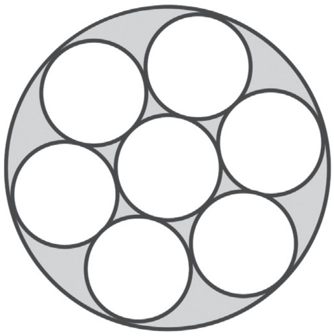
20. Záhrada v tvare pravouhlého trojuholníka je oplotená plotom s dĺžkou 364 m. Kratšia odvesna trojuholníka má dĺžku 26 m. Vypočítajte plochu tejto záhrady.

21. Na vašom dvore si chcete vybudovať záhradu, ktorú si chcete oplotiť. Hranica pozemku, na ktorej je postavený plot, má dĺžku 16 m. Akú plochu v metroch štvorcových bude mať takto oplotená záhrada (v celých metroch), ak:

a) bude mať tvar obdĺžnika so stranou dlhou 5 m?
b) bude mať tvar štvorca?
c) bude mať tvar kruhu?

22. Ema lakuje podlahu v kruhovom átriu s priemerom 8 m. Jedna plechovka laku stačí na nalakovanie 3 m^2 plochy. Koľko plechoviek laku si musí Ema kúpiť, ak na náter podlahy v átriu sú potrebné 3 vrstvy laku?

23. Na obrázku je nákres Zdenovej kruhovej záhrady. Tvorí ju 7 malých kruhových záhonov s polomerom 1,5 m. Priestor medzi kruhovými záhonmi je vysypaný štrkom. Koľko vriec štrku musí Zdeno kúpiť, ak 1 vrece stačí na zasypanie 1,5 m^2 plochy?



24. Priemer bicyklového kolesa je 66 cm. Koľko celých metrov prejde toto koleso po 15 celých otáčkach? Koľkokrát sa otočí celé koleso bicykla, ak prejdeme 5 km?

25. Kružnicový oblúk na kružnici s polomerom 20 cm prislúcha stredovému uhlu 35°. Aká je dĺžka tohto oblúka a plošný obsah prislúchajúci kružnicovému oblúku?

MNOŽINY

Objekty s rovnakou vlastnosťou – **prvky množiny**.

Prvok m patrí množine M: $m \in M$.

Prvok m nepatrí množine M: $m \notin M$.

Konečná množina má konečný počet prvkov.

Nekonečná množina má nekonečný počet prvkov.

Prázdna množina neobsahuje žiadne prvky: $M = \emptyset = \{\,\}$

Veľkosť množiny M ($|M|$) je počet jej prvkov: $M = \{K, L, M\}$; $|M| = 3$

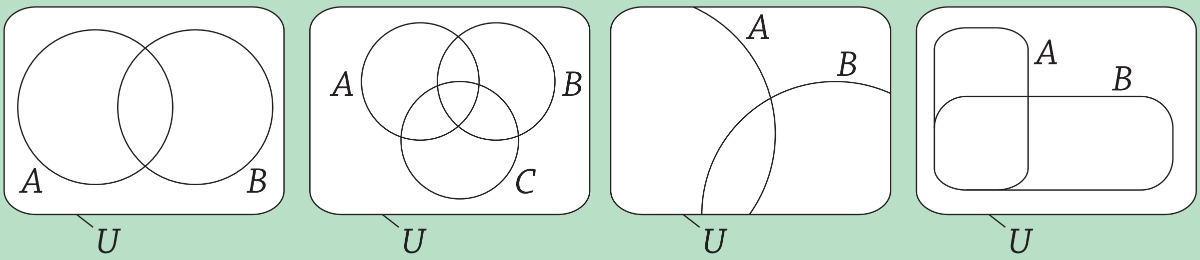
Určenie množiny

– charakteristickou vlastnosťou prvkov: T je množina dní v týždni

– vymenovaním prvkov: T = {pondelok, utorok, streda,..., sobota, nedeľa}

– matematickým zápisom na základe vlastností: $T = \{x\,;\, x \text{ je deň v týždni}\}$

Grafické znázornenie množín: Vennov diagram



Vzťahy a operácie medzi množinami

A je **podmnožina** množiny B ak všetky prvky množiny A sú zároveň prvkami množiny B. $A \subset B$

Prienik množín A a B je množina prvkov, ktoré patria množine A a súčasne množine B. $A \cap B$

Zjednotenie množín A a B je množina prvkov, ktoré patria aspoň jednej z týchto množín. $A \cup B$

Rozdiel množín A a B je množina prvkov množiny A, ktoré nie sú prvkami množiny B. $A - B$

Doplnok množiny A v množine B tvoria prvky množiny B, ktoré nie sú prvkami množiny A. A'_B

Karteziánsky súčin množín A a B je množina usporiadaných dvojíc $[a, b]$, pričom $a \in A$, $b \in B$.

Každá množina má aspoň 2 podmnožiny: seba samú a prázdnu množinu.

obdobne $B - A$

Doplnok A'_B existuje len ak $A \subset B$.

Množiny A a B sa rovnajú, ak všetky prvky množiny A sú prvkami množiny B a naopak všetky prvky množiny B sú prvkami množiny A.

Číselné množiny

Reálne čísla – R

Racionálne čísla – Q
– všetky čísla, ktoré sa dajú napísať ako zlomok

Celé čísla – Z

$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$Z^- = \{\dots -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

$Z_0^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$Z_0^- = \{\dots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

$Z - \{0\} = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

Prirodzené čísla – N

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Iracionálne čísla – I
– všetky čísla, ktoré sa nedajú zapísať ako zlomok.

Interval – podmnožina množiny reálnych čísel.

Názov intervalu	**Zápis intervalu**	**Zápis intervalu ako množiny**	**Znázornenie intervalu na číselnej osi**
Ohraničené intervaly			
Uzavretý interval	$\langle a, b\rangle$	$\{x \in R; a \leq x \leq b\}$	
Polouzavretý interval – zľava otvorený a sprava uzavretý	$(a, b\rangle$	$\{x \in R; a < x \leq b\}$	
Polouzavretý interval – zľava uzavretý a sprava otvorený	$\langle a, b)$	$\{x \in R; a \leq x < b\}$	
Otvorený interval	(a, b)	$\{x \in R; a < x < b\}$	
Neohraničené intervaly			
Zľava uzavretý od a do plus nekonečna	$\langle a, \infty)$	$\{x \in R; x \geq a\}$	
Zľava otvorený od a do plus nekonečna	(a,∞)	$\{x \in R; x > a\}$	
Sprava uzavretý od mínus nekonečna do a	$(-\infty, a\rangle$	$\{x \in R; x \leq a\}$	
Sprava otvorený od mínus nekonečna do a	$(-\infty, a)$	$\{x \in R; x < a\}$	
Od mínus nekonečna do plus nekonečna	$(-\infty, \infty)$	R	

Množiny

1. Uveďte tri príklady množín. Použite rôzne spôsoby ich zadania.

2. Matematickým zápisom na základe vlastností jej prvkov je daná množina $M = \{x;\, x$ je kalendárny mesiac, ktorého názov začína písmenom M$\}$. Vypíšte prvky tejto množiny.

3. Daná je množina $S = \{a, e, i, o, u, y, ä\}$. Zapíšte túto množinu matematickým zápisom na základe vlastností jej prvkov.

4. Vypíšte 4 prvky, ktoré do danej množiny patria, a 4 prvky, ktoré do uvedenej množiny nepatria.

a) množina A krstných mien začínajúcich písmenom A

b) množina $B = \{x;\, x$ je písmeno v slove PRVOSIENKY$\}$

c) množina C všetkých zlomkov väčších ako 1 a menších ako 2

d) množina D $\{x\colon x \in Z, -4 < x < 1\}$

5. Vennovým diagramom sú dané tri množiny A, B, C a základná množina U, ktorých prvky patria do oblastí I, II, ...VII. Ktoré oblasti patria do množiny

a) A? ______

b) $A \cup B$? ______

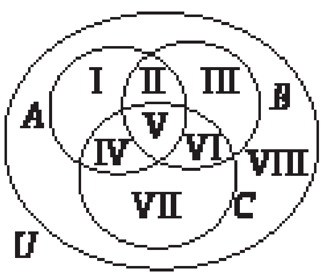
c) $C \cap B$? ______

d) A'? ______

e) $A \cap B \cap C$? ______

f) $A \cap (B \cup C)$? ______

g) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$? ______



6. Pomocou Vennovho diagramu zistite, ktoré z uvedených množín sú zhodné.

$K = (A \cap B)'$ $L = A' \cup B'$

$M = (A \cup B)'$ $N = A' \cap B'$

7. Dokážte pomocou Vennovho diagramu, že platí rovnosť $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8. Zistite, v akom vzťahu sú množiny A a B ($A = B$, $A \subset B$, $B \subset A$). Doplňte znak na určené miesto.

a) $A = \{x: x$ je písmeno slova MAXIMUM$\}$ ______ $B = \{M, X, A, I, U\}$

b) $A = \{0, 1, 2, 3,\ldots 10\}$ ______ $B = \{x: x \in Z, 0 \leq x < 11\}$

c) $A = \{x: x$ je kladné prvočíslo menšie ako $15\}$ ______ $B = \{2, 5, 11\}$

d) $A = \{x: x \in N, -5 < x \leq 4\}$ ______ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

e) $A = \{$piatok, sobota, nedeľa$\}$ ______ B je množina dní v týždni.

f) $A = \{x: x \in Z, -5 < x \leq 4\}$ ______ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

9. Rozhodnite, či sú uvedené množiny nekonečné:

a) množina celých čísel menších ako 10 ☐

b) množina nepárnych čísel menších ako 10 ☐

c) množina prvočísel menších ako 10 ☐

d) množina deliteľov čísla 10 ☐

e) množina reálnych čísel menších ako 10 ☐

10. Určte, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé a ktoré nepravdivé:

a) $7 \notin \{1, 2, 5, 6, 8\}$ ______

b) $r \in \{a, b, c, d, \ldots z\}$ ______

c) Zem $\in \{x$: x je planéta$\}$ ______

d) $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$ ______

e) $9 \notin \{x$: x je prvočíslo$\}$ ______

f) $\{1, 1, 2, 3, 4, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ______

g) A je množina všetkých deliteľov čísla 12 a číslo 5 je prvkom množiny A. ______

h) A je množina deliteľov čísla 6 a B je množina deliteľov čísla 15. Potom $|A| = |B|$. ______

11. X je množina násobkov čísla 3, Y je množina násobkov čísla 6 a Z je množina násobkov čísla 9. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé a ktoré nepravdivé:

a) $X \subset Z$ ☐

b) $Y \subset Z$ ☐

c) $Z \subset Y$ ☐

d) $X \subset Y$ ☐

e) $Y \subset X$ ☐

f) $Z \subset X$ ☐

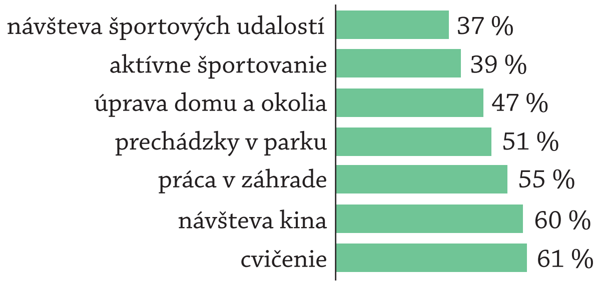
12. Daná je množina A. Koľko podmnožín má množina A? Vypíšte ich.

a) $A = \{F\}$ ______

b) $A = \emptyset$ ______

c) $A = \{a, b, c, d\}$ ______

13. Stĺpcový pruhový graf zobrazuje, ako trávia ľudia svoj voľný čas.



Uveďte prvky množiny, ktorú tvoria voľnočasové aktivity, ktorých sa zúčastňuje:

a) 60 a viac percent opýtaných,

b) viac ako 55 % opýtaných,

c) od 45 % do 55 % opýtaných,

d) menej ako 50 % opýtaných.

14. Doplňte symbol ∈ alebo ∉ na určené miesto tak, aby bol výrok pravdivý:

a) 12,65 ______ $\{x: x \in R\}$

b) 10,5 ______ $\{x: x \in R, x \geq 10\}$

c) ∅ ______ { }

d) 10,5 ______ $\{x: x \in Z, x \geq 3\}$

e) 0 ______ ∅

f) marec ______ {*x*: *x* je deň v týždni}

g) −1 ______ $\{x: x \in N, x \leq 3\}$

h) Alexander Dubček ______ {*x*: *x* je prezident SR}

15. Doplňte symbol ⊂ alebo ⊄ na určené miesto tak, aby bol výrok pravdivý:

a) {1, 3, 5, 7} ______ {*x*: *x* je nepárne číslo}

b) {1, 3, 5, 7} ______ {*x*: *x* je prvočíslo}

c) ∅ ______ {2, 4, 6, 15}

d) 0 ______ ∅

e) {*x*: *x* je deň víkendu} ______ {*x*: *x* je deň v týždni}

f) {10,5; 11; 11,5} ______ $\{x: x \in Z; x \geq 10\}$

g) {Praha, Londýn, Sydney} ______ *B* = {*x*: *x* je hlavné mesto}

16. Dané sú množiny A a B. Nájdite množiny $C = A \cap B$ a $D = A \cup B$.

a) $A = \{0, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{-3, -2, 0, 1, 5, 9\}$

b) A je množina celých párnych čísel; $B = \{x: x \in N\}$

c) $A = \{x: x \in R\}$; $B = \{x: x \in N\}$

d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; množina B prirodzených nepárnych čísel

e) $A = \{x: x \in Z, -3 < x < 15\}$; $B = \{x: x \in N, -3 < x < 15\}$

17. Daná je množina U a jej podmnožiny A, B, C, D. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, o\}$; $A = \{a, e, o\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $C = \{x: x$ je spoluhláska$\}$, $D = \{x: x$ je samohláska$\}$. Určte množiny:

a) $A \cap B$ ______

b) $A \cup C$ ______

c) A' ______

d) A_D' ______

e) $D \cap B$ ______

f) B' ______

g) $C \cap B$ ______

h) $A \cup B$ ______

i) $(A \cup B)'$ ______

j) $(A \cap B)'$ ______

k) $(C \cap D) \cup B$ ______

l) $C \cap (D \cup B)$ ______

18. V rodinnom albume je 77 fotografií, na ktorých sú dvojičky Adam alebo Jana. Obe dvojičky sú spolu na 30 fotografiách. Fotografií, na ktorých je len Jana, je o 5 viac ako fotografií, na ktorých je len Adam. Na koľkých fotografiách z albumu je len Jana?

19. Z matematiky alebo fyziky maturuje 78 študentov školy. Študentov, ktorí maturujú z matematiky a nematurujú z fyziky, je trikrát viac ako tých, ktorí maturujú z fyziky a nematurujú z matematiky. Z matematiky maturuje 69 študentov. Koľko študentov maturuje z matematiky aj fyziky?

20. Študenti vysokej školy si pri zápise vyberali cudzí jazyk do prvého ročníka. Spomedzi 120 zapísaných študentov si 75 zvolilo angličtinu, 65 nemčinu a 40 aj angličtinu, aj nemčinu. Použitím Vennovho diagramu určte, koľko zo zapísaných študentov:

a) si zvolilo iba angličtinu ______

b) si zvolilo iba nemčinu ______

c) si zvolilo angličtinu alebo nemčinu ______

d) si nezvolilo ani angličtinu, ani nemčinu ______

21. Dané sú množiny A, B, C, D, E, F. Vypíšte prvky týchto množín. Určte $C - B$, $C \cap D$, $C \cup B$, $A \cap B'$, $C \cup (A \cap B)$, E_F'.

$A = \{x \in R: x^2 - x - 12 \leq 0\} =$ ______

$B = \{x \in Z: -3 \leq x < 1\} =$ ______

$C = \{x \in R: |x| \leq 3\} =$ ______

$D = \{x \in N: x < 11\} =$ ______

$E = \{x \in N: 3 < x < 7\} =$ ______

$F = \{x \in N: 2x - 3 \leq 11\} =$ ______

22. Spomedzi 80 opýtaných žiakov našej školy počúva 42 rock, 34 klasickú hudbu a 27 džez. Ďalej vieme, že 12 žiakov počúva rock a džez, 14 rock a klasickú hudbu, 10 klasickú hudbu a džez a 7 žiakov počúva všetky tri žánre. Zistite, koľko žiakov:

a) počúva iba rock,
b) počúva klasiku a džez, ale nepočúva rock,
c) počúva klasiku alebo džez, ale nepočúva rock,
d) počúva práve jeden z uvedených hudobných žánrov,
e) počúva práve dva z uvedených hudobných žánrov,
f) nepočúva ani jeden z uvedených hudobných žánrov.

SKONTROLUJ SA

Čísla a operácie s nimi • Deliteľnosť a zlomky

1 a) 15 balení/2 € ostanú. b) 13 balení/4 € ostanú. c) 12 balení/1 € ostane. • 3 a) D = {1, 2, 3, 6, 9, 18} b) D = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} c) D = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} • 4 a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ c) $2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$ • 6 a) NSN = 180, NSD = 5 b) NSN = 385, NSD = 11 c) NSN = 840, NSD = 6 • 7 90 štvorcov s obsahom 324 dm². • 8 a) $\frac{12}{77} < \frac{9}{55}$ b) $\frac{7}{32} < \frac{8}{28}$ c) $\frac{7}{36} < \frac{5}{24}$ • 9 Janka dostane o $\frac{11}{35}$ viac. • 10 [illegible] • 11 270 • 12 Syn: $\frac{27}{252}$, dcéra: $\frac{28}{252}$. • 13 Každý dostal 400 €. V pokladni ostalo 200 €. • 14 Ráno bolo v sklade 3,6 t. Adamík kúpil 3 000 kg, Biely 400 kg, Certis 120 kg.

Percentá a promile

1 Skateboard 90 €, tenisky 123 €, korčule 60 €. • 2 80 % • 3 28,57 % • 4 Nohavice. • 5 Ema nazbierala o 15,75 kg viac. • 6 72 € • 7 32 % • 8 299 ľudí. • 9 1 200 € • 10 1 050 fanúšikov. • 11 7,47 ‰ • 12 127,5 ‰ • 13 29 km • 14 23,4 m • 15 22,7 g • 16 3,32 ‰ • 17 1 051 354 ľudí.

Niečo málo z finančnej matematiky

1 a) 521,3 CHF; 7 784,4 CZK b) 94,8 € c) 760,2 € d) 142,53 € • 2 2 900 € • 3 Hrubá mzda 180 €; odvod 34,20 €. • 4 2 909 € • 5 Jedno z možných riešení 3 915 €.

Pomer

1 a) 5 : 7 b) 2 : 3 c) 2 : 5 d) 16 : 1 •

2

Biela	Čierna
6 litrov	10 l
12 litrov	20 l
21 litrov	35 l

Biela	Čierna
9 l	6 litrov
15 l	12 litrov
24 l	21 litrov

3

Olej	Ocot
25 ml	10 ml
1,5 l	0,6 l
35 ml	14 ml

Olej	Ocot
105 ml	42 ml
50 ml	20 ml
7,5 l	3 l

4 Plávanie 3 km; cyklistika 4,5 km; beh 7,5 km. • 5 a) 1 650 b) 440 c) 704 d) 275 • 6 12 • 7 5 : 2 : 3 • 8 a) 1 : 4 : 6 b) 13 : 26 : 16

Mocniny a odmocniny

1 a) $12x^4y^9$ b) $16a^8b^{12}c^4$ c) $\frac{4s}{r^3}$ d) $\frac{u^6}{v^9}$ e) $\frac{8v^3}{u^6}$ f) $\frac{20y}{x^3}$ g) $-288r^8s^{11}$ h) $\frac{2x^4}{y^7}$ i) [illegible] • 2 a) 9, −9 b) 6 c) $\frac{3y^3}{x^2}$ d) $\frac{2a^2}{b}$ e) [illegible] f) $3s^2\sqrt{r^3}$

Vedecký zápis čísla

1 365 dní... $8{,}76 \cdot 10^3$; 366 dní... $8{,}78 \cdot 10^3$ • 2 $2{,}25 \cdot 10^{13}$ • 3 $4{,}33 \cdot 10^{12}$ • 4 $3{,}15 \cdot 10^8$ • 5 $9{,}86 \cdot 10^{-19}$

Číselné sústavy

1

10	2	10	2	10	2
0	0	7	111	14	1110
1	1	8	1000	15	1111
2	10	9	1001	16	10000
3	11	10	1010	17	10001
4	100	11	1011	18	10010
5	101	12	1100	19	10011
6	110	13	1101	20	10100

2 a) 3 b) 7 c) 14 d) 9 e) 230 • 3 a) 5 b) 29 c) 33 d) 75 e) 10110 f) 1001111 g) 1100010 h) 10011100 • 4

a	b	a + b	a − c	a − c
101	10	111	11	1010
1101	101	10010	1000	1000001
10110	110	11100	10000	10000100
10011	1011	11110	1000	11010001
111010	10101	1001111	100101	10011000010

5 a) 21 b) 60 c) 107 d) 750 • 6 a) 37 b) 123 c) 339 d) 438 e) 9 633

Algebrický výraz • Výrazy s jednou premennou

1 a) $5 \cdot 2x = 10x$ b) $4x + 15$ c) $3x : 7$ d) $5x - 11$ e) $4x + 15$ f) $9(x - 5)$ • 2 a) $1000 : x$ b) $3x + 5$ c) $15x - 25$ • 3 a) $6x^3 + 7x^2 + 6x - 4$ b) $15x^3 - x^2 + 8x + 10$ • 4 $2x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 2x - 12$ • 5 a) $x^3 - 9x^2 + 13x - 3$ b) $2z(x + y)$ • 6 a) $2a^4 - 8b^4 - 3a^2b^2 - 7a^2b^3$ b) $10a^4 - 10a^3b - 3a^2b^2 - 20ab^3 + 7a^2b^3 + 2b^4$ c) $8a^4 - 16a^3b + 7a^2b^2 + 7a^2b^3 - 8ab^3 + 6b^4$ • 7 a) $4a^2 - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$ b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ c) $(ay - bx)^2 = (ay - bx)^2$ d) $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ • 8 a) $2m(p - q)$ b) $2y(ab - 5ac + 4bc)$ c) $(2 - 3x)(2 + 3x)$ d) $(5x - a)^2$ e) $(x - 3)(7 - 2b)$ f) $(r - 1)(r^2 + 1)$ g) $(r - 7)(r - s)(r + s)$ h) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$ i) $m^2k^2(2k - 7m)(2k + 7m)$ j) $3 - a + b$ k) $(3a - 2b + 4)(3a + 2b - 6)$ • 9 a) 0 b) 0 c) $5x - 3y + 9z$ d) y^3 e) $26ab - 30a^2$ f) $x^4(1 + 8x^2)$ g) $a^4(3y^2 - 1)$ • 10 a) $2a^4b^3x^2$ b) $a + 1$ c) $b(a + 3)$ d) $(p - 1)(p^2 + 1)$ e) $m - n$ f) $(a + 3)$ g) $x - 3$ h) $a - 2$ • 11 a) $a^5b^4x^5$ b) $ab(x + 1)(x - 1)$ c) $(y - 1)^2(y + 1)^2y^2$ d) $xp(p - q)(p + q)$ e) $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$ • 12 a) NSN = $(m + 1)(m - 1)^2$; NSD = $m - 1$ b) NSN = $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$;

NSD = $(x - y)(x + y)$ c) NSN = $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$; NSD = $x + 1$ d) NSN = $(2a + 3b)^2(a - 3b)$; NSD = $2a + 3b$ e) NSN = $3a^2(a + 2b)^2(a - 2b)$; NSD = $a + 2b$

Lomené výrazy

1 a) $x \in R$ b) $x \in R - \{8\}$ c) $x \in R - \{0, 1\}$ d) $x \in R - \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ • 2 a) $\frac{8x}{9z}$ b) $\frac{3y}{5z}$ c) $\frac{3a}{2b}$ d) $\frac{3(a-c)}{2(a-b)^2}$ e) $\frac{a-b}{a+b}$ f) $\frac{2x+y}{y}$ g) $\frac{x-2}{xy(2x-y)}$ • 3 a) $\frac{2x-3y}{2x-5y}$ b) $\frac{8x^3y^2}{10x^2}$ c) $\frac{2a(a+b)}{a^2-b^2}$ d) $\frac{3(x^2+5x+6)}{6(x+2)^2}$ • 4 a) $\frac{-x}{2a-5}$ b) $\frac{5a-b-1}{a^2-b^2}$ c) $\frac{x^3+2x^2-4x+6}{x(x+2)(x+3)}$ d) $\frac{29x}{24y}$ e) $\frac{5}{r-s}$ f) $\frac{b^2-ab}{a}$ g) $\frac{3a+5b}{a-b}$ h) $\frac{-3x}{2(1-y)}$ i) $\frac{2x-2y}{x(x+y)}$ • 5 a) $\frac{2}{3abx}$ b) $-\frac{7c^2d^2}{4a^2b^2}$ c) $\frac{9b}{5ay}$ d) $a + 2b$ e) $\frac{a^2(a-b)}{a+b}$ f) $\frac{x-2y}{x^2}$ g) $\frac{20}{3}$

Polynómy

1 a) $P(x) + Q(x) = 5x^3 + x^2 - 4x + 10$;
$P(x) - Q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$;
$P(x) \cdot Q(x) = 6x^6 + x^5 - 13x^4 + 21x^3 + 11x^2 - 18x + 24$
b) $P(x) + Q(x) = 2x^4 + 5x^2 + 3$;
$P(x) - Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 5$;
$P(x) \cdot Q(x) = 2x^7 + 3x^6 - x^5 + 16x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 5x - 4$
c) $P(x) + Q(x) = 4x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 11$;
$P(x) - Q(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$;
$P(x) \cdot Q(x) = 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 - 8x^5 + 23x^4 + 9x^3 - 12x^2 - 10x + 30$
2 a) $P(x) : Q(x) = 3x^2 + 8x + 15$; 2 nie je koreňom $P(x)$; $P(2) = 34$ b) $P(x) : Q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 18x + 55$; 3 nie je koreňom $P(x)$; $P(3) = 164$ c) $P(x) : Q(x) = 3x^2 + x + 2$; -1 je koreňom $P(x)$; $P(-1) = 0$ d) $P(x) : Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 6$; -2 nie je koreňom $P(x)$; $P(-2) = 18$

Výroková logika a dôkazy • Jednoduchý výrok a jeho negácia

1 a) áno b) áno c) nie d) nie e) áno f) nie g) áno h) nie • 2 a) P' b) Q' c) R' d) S' • 3 P': Existuje ryba, ktorá nemá kosti. Q': Žiadna kolobežka nemá elektrický pohon. R': Žiadny herec nie je režisérom. S': Existuje žena, ktorá aspoň raz vstúpi do mešity. T': Najviac dvaja členovia družstva dnes dali gól. U': Existuje aspoň jedna modrá ruža. V': Aspoň 8 osôb sa môže odviezť výťahom. • 4 P': Priamky a, b nie sú na seba kolmé. Q': Existujú reálne čísla a, b, pre ktoré neplatí $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. R': Pre všetky reálne čísla a, b platí $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. S': $5 \cdot 3 + 13 \leq 26$ T': Najviac 3 čísla menšie ako 10 sú prvočísla. U': Z 8 osôb vytvorím aspoň 6 rôznych trojčlenných osôb. V': Úloha má 0, 1, alebo viac ako 2 riešenia. • 5 a) $\exists\, x \in Z;\ x^3 < 0$ b) $\forall\, n \in N;\ 2n \leq n$ c) $\exists\, x \in R;\ x^2 - 2 \neq 0$ d) $\forall\, x \in Z;\ x + \frac{1}{x} < 2$ e) $\exists\, x \in R;\ 2x < \sqrt[3]{x}$ f) $\forall\, x \in R;\ x^2 + 2x + 1 \neq 0$ • 6 B • 7 B • 8 a) $\forall\, a \in R;\ a^2 \geq 0$ b) $\exists\, n \in N$; n je koreňom rovnice $x^2 - 9 = 0$ c) $\exists\, x \in R;\ x^3 = -5$ d) $\forall\, x \in R;\ x > \frac{1}{x}$ e) $\exists\, x \in R;\ \frac{1}{x} > 10$

Zložené výroky a ich negácia

1 A': Zajtra nebude snežiť alebo teploty presiahnu 0 °C. B': Na večeru si nedám chlieb alebo si nedám maslo. C': Po obede si neobjednám čaj ani kávu. D': Nekúpim si kolobežku ani bicykel. E': Vodič chce odbočiť a nedáva znamenie o zmene smeru jazdy. F': Kúpim si slivky a budú aj jablká alebo nekúpim slivky a nebudú jablká. G': Daná rovnica nemá kladný ani záporný koreň. H': Číslo 50 nie je deliteľné 15 a je deliteľné 5. I': Daná rovnica má jeden dvojnásobný koreň a nemá žiadny ďalší koreň. J': Jana pride a Ivana nepríde alebo Jana nepríde a Ivana príde. • 2 a) Pravda. b) Pravda. c) Nepravda. d) Pravda. e) Pravda.

Kontradikcie a tautológie

1 a) tautológia b) kontradikcia c) tautológia d) kontradikcia • 2 a) áno b) áno c) áno d) áno • 3 A: Adam príde. B: Boris príde. C: Cyril príde. P: $A \wedge B \Longrightarrow C$. K: $A \wedge C' \Longrightarrow B'$. Obaja hovoria to isté. • 4 Otvorená je stanica B a C, alebo je otvorená iba stanica A alebo stanica A a B.

Obmena a obrátenie implikácie

1 A: Obmena: Ak si vodič neurobí prestávku, necíti sa unavený. Obrátenie: Ak vodič urobí prestávku, cíti sa unavený. B: Obmena: Ak sa liečim, mám zvýšenú teplotu. Obrátenie: Ak sa neliečim, nemám zvýšenú teplotu C: Obmena: Ak je n je nepárne, potom aj n^2 je nepárne. Obrátenie: Ak je n párne, potom aj n^2 je párne. D: Obmena: Ak číslo nie je deliteľné tromi, tak nie je deliteľné ani deviatimi. Obrátenie: Ak číslo je deliteľné tromi, tak je deliteľné aj deviatimi. E: Obmena: Ak všetky tri strany trojuholníka ABC nemajú rovnakú veľkosť, tak trojuholník ABC nie je rovnostranný. Obrátenie: Ak všetky tri strany trojuholníka ABC majú rovnakú veľkosť, tak trojuholník ABC je rovnostranný. • 2 A: Negácia: Číslo je deliteľné ôsmimi a je nepárne. Obmena: Ak je číslo nepárne, tak nie je deliteľné ôsmimi. Obrátenie: Ak je číslo párne, tak je deliteľné ôsmimi. B: Negácia: Konvexný štvoruholník je kosoštvorec a jeho uhlopriečky nie sú navzájom kolmé. Obmena: Ak nie sú uhlopriečky štvoruholníka navzájom kolmé, tak to nie je kosoštvorec. Obrátenie: Ak sú uhlopriečky štvoruholníka navzájom kolmé, tak to je kosoštvorec. C: Negácia: Druhá mocnina reálneho čísla je väčšia ako 5 a toto číslo je menšie alebo rovné ako 5. Obmena: Ak je číslo menšie alebo rovné ako 5, tak jeho druhá mocnina je menšia ako 5. Obrátenie: Ak je číslo väčšia ako 5, tak jeho druhá mocnina je väčšia ako 5. D: Negácia: Štvoruholník má aspoň tri strany rovnako dlhé, jeho uhlopriečky sa rozpoľujú a nie je to kosoštvorec ani štvorec. Obmena: Ak štvoruholník nie je kosoštvorec a nie je ani štvorec, tak má najviac dve strany rovnako dlhé alebo sa jeho uhlopriečky nerozpoľujú. Obrátenie: Ak je štvoruholník kosoštvorec alebo štvorec,

tak má aspoň tri strany rovnako dlhé a jeho uhlopriečky sa rozpoľujú.

Protipríklad

1 a) Napr. x = 1, x < 1. b) Všetky prvočísla. c) Napr. 30. d) Napr. $-\frac{3}{2}$. e) x < 1 f) 5 g) 1, 2,... h) Napr. a < 0 a b > 0. i) 4

Priamy dôkaz

1 $(2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ • 3 a) $n = 3k$; $9k^2 - 3k = 3k(3k - 1)$, číslo $3k$ je deliteľné 3 a číslo $3k - 1$ je o jedno menšie, preto je deliteľné 2. Ich súčin je deliteľný 6. b) – d) Podobne ako v a). • 4 a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$; po úprave: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$; $2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2ac + 2c^2 - 2bc \geq 0$; $a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + c^2 - 2bc + b^2 \geq 0$; $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$; vždy platí – čbtd. b) – d) Podobne ako v a). • 5 $2x^2 \leq 1 + x^4$; $0 \leq 1 - 2x^2 + x^4$; $0 \leq (1 - x^2)^2$ • 6 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $(a + b)^2 \geq 4ab$; $a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$; $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$; $(a - b)^2 \geq 0$

Nepriamy dôkaz

1 a) $2 \nmid n \Longrightarrow 2 \nmid n^2$; $n = 2k + 1$; $n^2 = (2k + 2) + 1$ b) $\frac{4}{n} \Longrightarrow \frac{2}{n^3}$; $n = 4k \Longrightarrow n^3 = 64k^3$ c) $\frac{6}{n} \Longrightarrow 3 \nmid (n^2 + 1)$; $n = 6k \Longrightarrow n^2 + 1 = 36k^2 + 1$ d) n je párne potom aj $n^3 - 6n^2 + 2n - 10$ je párne; $n = 2k \Longrightarrow$ $8k^3 - 24k^2 + 4k - 10 = 2(4k^3 - 12k^2 + 2k - 5)$ e) podobne ako v c $3 \nmid a \Longrightarrow \frac{3}{a^4 + 2}$; ukážeme pre $a = 3k + 1$ a pre $a = 3k + 2$

Dôkaz sporom

1 Vychádzame z negácie danej implikácie: Číslo je párne a jeho druhá mocnina je nepárne číslo. $n = 2k$ a $n^2 = 4k$, čo je spor • 2 Predpokladajme, že existujú 2 kolmice z bodu C na priamku AB. Potom by trojuholník ABC musel mať 2 pravé uhly, čo je spor s predpokladom.

Lineárne rovnice a nerovnice

1 a) 8 b) 8 c) −2 d) −2 e) ∅ f) $\frac{1}{3}$ g) −2 h) 3 i) −1 j) 6 • 2 a) −6 b) −16 c) 5 d) 1 • 3 a) −8 b) −1 c) 5 d) 7,5 • 4 a) 5 b) ∅ c) 1 d) R e) 6 f) −1 g) ∅ h) ∅ • 5 a) $(-5, \infty)$ b) $(7, \infty)$ c) $(-\infty, 9\rangle$ d) $(-\infty, 0)$ e) $\langle 4, \infty)$ f) $(3{,}5; \infty)$ • 6 a) $[1, 5]$ b) R c) $y = 36 - 9x$, napr. $[1, 27]$ d) ∅ • 7 a) 10 b) ∅ c) $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ d) $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$ e) $\langle -2, 1\rangle$ f) $\langle 2, \infty)$ • 8 a) R b) $(4, \infty)$ c) $\left\langle\frac{1}{2}, \infty\right)$ d) $(-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$

Kvadratické rovnice a nerovnice

1 a) $-1 - \sqrt{3}$; $-1 + \sqrt{3}$ b) 0; $\frac{8}{3}$ c) ∅ d) −3, −7 e) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{3}{2}$ • 2 a) R, b) $(3, 7)$ c) $(-\infty, -1) \cup \left\langle\frac{7}{2}, \infty\right)$ d) ∅ e) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ f) $\frac{3}{2}$

Slovné úlohy

1 98 % • 2 71 % • 3 35 € • 4 200 • 5 Notár 8,5 h, asistent 3,5 h. • 6 a) 64 s b) Aleš 128 m, Roman 96 m. • 7 a) $\frac{5}{9}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $\frac{20}{9}$ km • 8 72 (100-eurových bankoviek); 148 (50-eurových bankoviek). • 9 19 bicyklov a 8 trojkoliek. • 10 15 oviec, 18 husí a 18 kačiek. • 11 102 mužov, 34 žien, 154 detí. • 12 12 • 13 o = 60 cm, S = 120 cm² • 14 10 m • 15 25 • 16 Strom 47 €, krík 23 €.

Planimetria

1 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ • 2 $\sqrt{2}a$ • 3 $3\sqrt{5}$ • 4 r = 17 cm • 5 r = 92,5 m • 6 d_1 = 8,52 cm; d_2 = 1,88 cm • 7 o = 72 cm • 8 Základňa 16 cm, rameno 17 cm. • 9 t_a = 19,5 cm • 10 $t_b = \sqrt{24}$ • 11 $o = 24 + 2\sqrt{34}$ cm, S = 60 cm² • 12 v = 12 cm, $u = \sqrt{1105}$ cm • 13 204 cm² • 14 u_1 = 10 cm; u_2 = 15 cm • 15 25 • 16 1 092 cm² • 17 588 cm² • 18 Prepona 26,5 cm; odvesna 22,5 cm. • 19 6 cm, 8 cm • 20 2 184 m² • 21 a) 15 m² b) 16 m² c) 20 m² • 22 51 • 23 10 • 24 31 m, 2 411-krát. • 25 12,18 cm; 122 cm²

Množiny

2 M = {marec, máj} • 3 $S = \{x$: x je krátka samohláska$\}$ • 5 a) I, II, IV, V b) I, II, III, IV, V, VI c) V, VI d) III, VI, VII, VIII e) V f) II, IV, V g) II, V, VI • 8 a) $A = B$ b) $A = B$ c) $A \subset B$ d) $A = B$ e) $A \subset B$ f) $B \subset A$ • 9 a) A b) A c) N d) N e) A • 10 a) P b) P c) P d) P e) P f) P g) N h) P • 11 a) N b) N c) N d) N e) P f) P • 12 a) 2 − {F}, ∅ b) 1 − ∅ c) 16 − ∅, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ • 14 a) ∈ b) ∈ c) ∈ d) ∉ e) ∉ f) ∉ g) ∉ h) ∈ • 15 a) ⊂ b) ⊂ c) ⊂ d) ⊄ e) ⊂ f) ⊄ g) ⊄ • 16 a) $C = \{0, 5, 9\}$, $D = \{-3, -2, 0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ b) $C = \{2, 4, 6, 8,...\}$, $D = \{... -8, -6, -4, -2, 0, 1, 2, 3,...\}$ c) $C = \{x: x \in N\}$, $D = \{x: x \in R\}$ d) $C = \{1, 3, 5, 7, 9,...\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9,...\}$ e) $C = \{1, 2, 3,... 15\}$, $D = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5,... 15\}$ • 17 a) $\{a, e\}$ b) $\{a, e, o, b, c, d, f, g, h, k, m, n\}$ c) $\{b, c, d, f, g, h, k, m, n\}$ d) ∅ e) $\{a, e\}$ f) $\{h, k, m, n, o\}$ g) $\{b, c, d, f, g\}$ h) $\{a, b, c, d, e, f, g, o\}$ i) $\{h, k, m, n\}$ j) $\{b, c, d, f, g, h, k, m, n, o\}$ k) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ l) $\{b, c, d, f, g\}$ • 18 Jana je na 26 fotografiách. • 19 42 • 20 a) 35 b) 25 c) 100 d) 20 • 21 $C - B = \{1, 2, 3\}$, $C \cap D = \{1, 2, 3\}$, $C \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B' = \{1, 2, 3, 4\}$, $C \cup (A \cap B) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $E'_F = \{1, 2, 3, 7\}$ • 22 a) 23 b) 3 c) 32 d) 52 e) 15 f) 6